

УДК 519.853.3

**МЕТОД ОТДЕЛЯЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПАМЯТЬЮ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОЙ НЕГЛАДКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**

Е. А. Нурминский¹

Рассмотрена модификация метода отделяющих плоскостей, предназначенного для решения задач n -мерной выпуклой негладкой оптимизации, с ограничением порядка n^2 на используемую память. Работа выполнена при поддержке Дальневосточного отделения РАН (проект 06-Ш-А-01-459 “Разработка и исследование математических моделей принятия решений для структурированных задач большой размерности”).

1. Введение. В n -мерном евклидовом пространстве E_n рассматривается задача безусловной выпуклой оптимизации

$$\min_x f(x) = f(x^*), \quad x^* \in X_*, \tag{1}$$

где $f(x)$ — выпуклая, не обязательно гладкая функция. Пусть задача (1) имеет решение, т.е. $X_* \neq \emptyset$.

Для решения таких задач предложено значительное число методов (см., например, [1–3]), однако лишь немногие из них имеют гарантированные оценки скорости сходимости. Поэтому представляет интерес дальнейшее совершенствование аппарата негладкой выпуклой оптимизации, в связи с чем нами предпринята попытка усовершенствования алгоритма [4, 5] для сведения задачи (1) к вычислению

$$f^*(0) = \sup_x \{xp - f(x)\} \Big|_{p=0} = - \min_x f(x) \tag{2}$$

и, соответственно, $x^* \in \partial f^*(0)$.

Отличительной особенностью этого алгоритма является сверхлинейная скорость сходимости в идеализированном варианте и гарантия получения точного решения за конечное число итераций в кусочно-линейном случае, что позволяет надеяться и на его неплохие практические вычислительные свойства. Вычислительные эксперименты в целом продемонстрировали удовлетворительную сходимость, однако в своей первоначальной форме метод имел и существенный недостаток — в ходе его работы необходимо было сохранять и использовать всю предысторию, т.е. последовательность вычисляемых субградиентов и значений функции.

Несомненно, это является существенным недостатком алгоритма, и в данной статье предложена и исследована его модификация, требующая сохранения не более чем n последних субградиентов.

2. Алгоритм. Алгоритм удобнее всего представить в расширенном двойственном пространстве E_{n+1}^* , представляющем собой пространство сопряженных переменных $p \in E_n^*$, дополненное координатной осью, играющей роль значений сопряженной функции $f^*(p)$. В этом пространстве определим обычным образом надграфик f^* : $\text{epi } f^* = \{(p, \mu) : p \in E_n^*, \mu \geq f^*(p)\}$; тогда задача (2) представляет собой нахождение пересечения $\text{epi } f^*$ с вертикальной прямой $(0, \mu)$, $-\infty < \mu < \infty$. Аппроксимируя $\text{epi } f^*$ внутренним и внешним образом некоторыми D и U , $D \subset \text{epi } f^* \subset U$, получаем нижнюю и верхнюю границы для $f^*(0)$: $v_U = \inf_{(0, \mu) \in U} \mu \leq f^*(0) \leq \inf_{(0, \mu) \in D} \mu = v_D$. Уточняя соответствующие аппроксимации в окрестности точки $p = 0$, можно получить сходящиеся границы v_U, v_D , что и будет означать решение задач (1), (2). Впрочем, для решения задачи (1) достаточно будет показать сходимость хотя бы для одной из оценок.

Для построения аппроксимаций такого рода удобно использовать традиционные в выпуклом анализе внутренние и внешние представления выпуклых множеств как выпуклых оболочек набора точек множества (внутренняя аппроксимация) и пересечения подпространств, содержащих данное множество (внешняя аппроксимация). Для надграфика сопряженной функции эти аппроксимации оказываются естественным образом связаны посредством исходной целевой функции и ее субдифференциала: если в точке p

¹ Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН (ИАПУ ДВО РАН), 690041, г. Владивосток, ул. Радио, д. 5; e-mail: nurmi@dvo.ru

значение сопряженной функции равно $f^*(p)$ и ему соответствует x_p , на котором достигается $\sup_x \{xp - f(x)\} = x_p p - f(x_p) = f^*(p)$, то x_p является субградиентом $f^*(p)$ в точке p и полупространство $(q, \mu) : qx_p - \mu > px_p - f(x_p) = f^*(p)$ содержит $\text{epi } f^*$. Для достижимости соответствующих супремумов сразу предположим ко-коэрцитивность f , т.е. $f(x), f^*(p) \rightarrow \infty$ при $\|x\|, \|p\| \rightarrow \infty$.

Располагая некоторым набором точек расширенного сопряженного пространства

$$\Pi_k = \left\{ (p^0, f^*(p^0)), (p^1, f^*(p^1)), \dots, (p^k, f^*(p^k)) \right\} = \{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^k\},$$

где $\bar{p}^i = (p^i, f^*(p^i))$, $i = 0, 1, \dots$, и соответствующим набором точек расширенного исходного пространства $\Xi_k = \{(x^0, -1), (x^1, -1), \dots, (x^k, -1)\} = \{\bar{x}^0, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k\}$, такими, что $x^i \in \partial f^*(p^i)$, $p^i \in \partial f(x^i)$, $i = 0, 1, \dots, k$, можно построить аппроксимации $D_k = \text{co}\{\bar{p} \in \Pi_k\} + V$, где $V = \{(0, \mu) : \mu \geq 0\}$ и

$$U_k = \bigcap_{i=0,1,\dots,k} \{\bar{q} = (q, \mu) : \bar{q} \bar{x}^i = qx^i - \mu \leq \bar{p}^i \bar{x}^i = p^i x^i - f^*(p^i) = f(x^i)\}.$$

Обозначим для простоты $v_{U_k} = v_k$. Тогда

$$v_k = \min_{(0, \mu) \in U_k} \mu = \max_{i=0,1,\dots,k} \min_{\mu \geq -f(x^i)} \mu = - \min_{i=0,1,\dots,k} f(x^i) \leq f^*(0)$$

представляет собой с точностью до знака рекорд значений целевой функции $f(\cdot)$ на множестве точек x^0, x^1, \dots, x^k .

Оценка сверху $u_k = v_{D_k} = \inf_{(0, \mu) \in D_k} \mu \geq f^*(0)$ является, по сути дела, оценкой метода секущих плоскостей: $u_k = \inf \mu = \min_x \max_{i=1,2,\dots,k} \{f(x^i) + p^i(x - x^i)\}$ при $\sum_{i=1}^k \mu_i p^i = 0$, $\mu_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^k \mu_i = 1$, в чем легко

убедиться с помощью стандартной двойственности. Если $0 \notin \text{co}\{p^i, i = 1, 2, \dots, k\}$, то полагаем $w_k = \infty$.

Опишем теперь способ уточнения аппроксимаций D_k, U_k и, соответственно, алгоритм уточнения оценки v_k , что достаточно для решения задачи (1).

2.1. Алгоритм отделяющих плоскостей без ограничений. Предварительно мы опишем исходный алгоритм без ограничений на количество запоминаемых векторов, определяющих D_k .

Инициализация алгоритма. Положим $D_0 = \{\hat{v} = (0, \hat{\mu})\}$, где $\hat{\mu} > f^*(0)$, $U_0 = E_{n+1}^*$. Соответственно получаем $u_0 = \hat{\mu}$ и $v_0 = -\infty$. Положим x^0 некоторой начальной точкой минимизирующей последовательности и вычислим $f(x^0)$ и $p^0 \in \partial f(x^0)$. Установим счетчик итераций $k = 0$.

Шаг 1. Модификация аппроксимаций. Положим

$$D_{k+1} = \{D_k, \bar{p}^k\},$$

где $\bar{p}^k = (p^k, f^*(p^k)) = (p^k, x^k p^k - f(x^k))$ и $U_{k+1} = U_k \cap \{(p, \mu) : px^k - \mu \geq f(x^k) = p^k x^k - f^*(p^k)\}$. Соответственно модифицируем нижнюю оценку v_k :

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \inf_{(0, \mu) \in U_{k+1}} \mu = \inf_{(0, \mu) \in U_k \cap \{(p, \mu) : px^k - \mu \geq f(x^k)\}} \mu = \\ &= \max \left\{ \inf_{(0, \mu) \in U_k} \mu, \inf_{(0, \mu) \in \{(p, \mu) : px^k - \mu \geq f(x^k)\}} \mu \right\} = \max \{v_k, -f(x^k)\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Шаг 2. Проекция. Находим проекцию точки $\bar{v}^k = (0, v_k)$ на выпуклую оболочку D_{k+1} :

$$\bar{v}^k + z \in \text{co}\{D_{k+1}\} + V \quad \|z\|^2 = \|\bar{z}^k\|^2. \quad (4)$$

Представим \bar{z}^k в виде $\bar{z}^k = -\theta_k(x^k, -1)$. Далее будет показано, что $\theta_k > 0$.

Вектор \bar{z}^k задает гиперплоскость, отделяющую текущую оценку минимума \bar{v}^k от выпуклой оболочки внутренней аппроксимации D_{k+1} , что объясняет название метода.

Шаг 3. Подготовка данных для обновления аппроксимаций. Вычисляем значение опорной функции $\text{epi } f^*$ и подготавливаем данные для обновления аппроксимаций D_{k+1}, U_{k+1} :

$$\inf_{\bar{w} \in \text{epi } f^*} \bar{z}^k \bar{w} = -\theta_k \sup_{p, \mu > f^*(p)} \{x^k p - \mu\} = -\theta_k f(x^k). \quad (5)$$

Будем считать, что \sup достигается на точке надграфика $\bar{p}^{k+1} = (p^{k+1}, f^*(p^{k+1}))$, где $p^{k+1} \in \partial f(x^k)$ и $f^*(p^{k+1}) = x^k p^{k+1} - f(x^k)$.

Проверка сходимости. Проверяем выполнение какого-либо из условий прекращения работы алгоритма; если они не выполнены, то увеличиваем счетчик итераций $k \rightarrow k + 1$ и возвращаемся к Шагу 1. В качестве критерия останова алгоритма можно использовать, например, норму вектора \bar{z}^k , которая, как будет показано далее для модифицированного алгоритма, стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Как видно из приведенного описания алгоритма, на Шаге 1 в нем происходит неограниченное накопление точек $\bar{p}^i, i = 0, 1, \dots$, из которых формируется внутренняя аппроксимация D_k . Внешняя аппроксимация U_k участвует лишь в переопределении v_k , поэтому реально сохранять траекторию вычислительного процесса в прямом пространстве нет необходимости. Неограниченные потребности в памяти представляют, конечно, недостаток алгоритма, однако метод можно модифицировать, ограничив количество запоминаемых данных и сохранив общую идею.

2.2. Модифицированный алгоритм с ограниченной памятью. Для того чтобы ограничить рост количества точек во внутренней аппроксимации, заметим, что поскольку решение задачи (4) лежит на одной из граней Π_k , то оно определяется не более чем n точками множества Π_k . Удалив остальные точки из этого множества, можно без изменения решения задачи (4) продолжить работу алгоритма.

Поскольку при этом количество точек в множестве Π_k не будет превышать $n + 1$, в качестве дополнительного преимущества появляется возможность использовать эффективную процедуру проектирования на симплексы [6, 7], для которой доказана конечность и глобальная “лучше, чем линейная” скорость сходимости.

Инициализация алгоритма. Так же, как и в исходном алгоритме.

Шаг 1. Модификация аппроксимаций. Так же, как и в исходном алгоритме.

Шаг 2. Проекция. Так же, как и в исходном алгоритме.

Шаг 3. Подготовка данных для обновления аппроксимаций. Так же, как и в исходном алгоритме.

Шаг 4. Коррекция множества D_{k+1} . Пусть $\bar{z}^k + \bar{v}^k = \sum_{s=1}^{m_k} \lambda_s \bar{p}^{i_s}$ — некоторое представление решения

задачи (4) с $\lambda_s > 0, \sum_{s=1}^{m_k} \lambda_s = 1, \bar{p}^{i_s} \in D_{k+1}$. Заметим, что поскольку точка $\bar{v}^k \notin \text{epi } f^*$, то $m_k \leq n$. Положим

$D_{k+1} = \{\hat{v}, Q_k, \bar{p}^k\}$, где $Q_k \subset \{\bar{p}^{i_s}, s = 1, 2, \dots, m_k\}$. Заметим, что при этом не обязательно $\bar{p} \in \text{co}\{Q_k\}$.

Проверка сходимости. Так же, как и в исходном алгоритме.

Сходимость модифицированного алгоритма утверждает следующая теорема.

Теорема. Пусть f — замкнутая выпуклая ко-конечная функция. Тогда алгоритм сходится в том смысле, что $v_k \rightarrow f^*(0)$ при $k \rightarrow \infty$, и любая предельная точка последовательности $\{x^k\}$ принадлежит множеству решений X_* .

Доказательство. Прежде всего покажем, что при $v_k < f^*(0)$ вектор $\bar{z}^k \neq 0$, являющийся решением задачи (4), можно представить в виде $\bar{z}^k = \theta_k(x^k, -1)$, где $\theta_k > 0$.

В самом деле, если $v_k < f^*(0)$, то $\bar{v}^k = (0, v_k) \notin D_k \subset \text{epi } f^*$ и, следовательно, $\|\bar{z}^k\|^2 > 0$. Из оптимальности \bar{z}^k следует, что $(z - \bar{v}^k)\bar{z}^k \leq -\|\bar{z}^k\|^2$ для $z \in D_k$. Полагая $z = w^0$, получаем $-\theta_k(\bar{p} - v_k) < 0$, т.е. $\theta_k > 0$.

Заметим, что в силу (3) последовательность $\{v_k\}$ монотонна и так как $-f(x^k) = 0 \cdot x^k - f(x^k) \leq f^*(0)$, то из $v_k \leq f^*(0)$ следует $v_{k+1} \leq f^*(0)$. Отсюда по индукции выполнено $v_k \leq f^*(0)$ для всех k . Из монотонности и ограниченности следует существование предела $v_\bullet = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k$.

Далее покажем, что длина вектора \bar{z}^k монотонно убывает. Необходимо рассмотреть два случая.

1. $\sup_{\bar{p} \in \text{epi } f^*} (-\bar{z}^k \bar{p}) = \theta_k \{x^k \bar{p} - f^*(\bar{p})\} = \theta_k f(x^k) \geq -\theta_k v_k$, т.е. $f(x^k) \geq -v_k$. В этом случае $v_{k+1} = v_k$

и, следовательно, $\|\bar{z}^{k+1}\|^2 = \min_{v^{k+1} + z \in D_{k+1}} \|z\|^2 = \min_{v^k + z \in D_{k+1}} \|z\|^2$, где $D_{k+1} = \{w^0, Q_k, \bar{p}^{k+1}\}$; при этом $\|\bar{z}^{k+1}\|^2 \leq \min_{\lambda \in [0,1]} \|\bar{z}^k + \lambda(\bar{p}^{k+1} - \bar{z}^k)\|^2$.

Решением задачи на минимум по λ является $\lambda_*^k = \min \left\{ 1, \frac{\bar{z}^k(\bar{p}^{k+1} - \bar{z}^k)}{\|\bar{p}^{k+1} - \bar{z}^k\|^2} \right\} > 0$.

При $\lambda \leq \lambda_*^k \leq \frac{\bar{z}^k(\bar{p}^{k+1} - \bar{z}^k)}{\|\bar{p}^{k+1} - \bar{z}^k\|^2}$ имеем

$$\|\bar{z}^k + \lambda(\bar{p}^{k+1} - \bar{z}^k)\|^2 = \|\bar{z}^k\|^2 - 2\lambda(\bar{z}^k(\bar{p}^{k+1} - \bar{z}^k) - \lambda\|\bar{p}^{k+1} - \bar{z}^k\|^2/2).$$

Так как $\bar{z}^k(\bar{z}^k - \bar{p}^{k+1}) - \lambda\|\bar{z}^k - \bar{p}^{k+1}\|^2/2 \leq \lambda\|\bar{z}^k - \bar{p}^{k+1}\|^2 - \lambda\|\bar{z}^k - \bar{p}^{k+1}\|^2/2 = \lambda\|\bar{z}^k - \bar{p}^{k+1}\|^2/2 > 0$, то

$$\|\bar{z}^{k+1}\|^2 \leq \|\bar{z}^k + \lambda(\bar{p}^{k+1} - \bar{z}^k)\|^2 \leq \|\bar{z}^k\|^2 - 2\lambda \cdot \lambda\|\bar{p}^{k+1} - \bar{z}^k\|^2/2 = \|\bar{z}^k\|^2 - \lambda^2\|\bar{p}^{k+1} - \bar{z}^k\|^2 < \|\bar{z}^k\|^2.$$

$$2. \quad \sup_{\bar{p} \in \text{epi } f^*} (-\bar{z}^k \bar{p}) = \theta_k \{x^k p - f^*(p)\} = \theta_k f(x^k) < -\theta_k v_k, \text{ т.е. } f(x^k) < -v_k.$$

Тогда при $\tilde{z}^k = \lambda \bar{z}^k$ и $\lambda = \frac{\hat{\mu} - v_{k+1}}{\hat{\mu} - v_k} \in [0, 1)$ имеем

$$\|\bar{z}^{k+1}\| = \min_{\bar{v}^{k+1} + z \in \text{co}\{\Pi_k, \bar{p}^{k+1}, \hat{v}\}} \|z\| \leq \min_{\bar{v}^{k+1} + z \in \text{co}\{\Pi_k, \hat{v}\}} \|z\| \leq \|\tilde{z}^k\|.$$

Для того чтобы удостовериться в последнем, достаточно показать, что $v^{k+1} + \tilde{z}^k \in \text{co}\{\Pi_k, \varepsilon\}$. Действительно, при так определенном λ получаем $\bar{v}^{k+1} = \hat{\mu} - \lambda(\hat{\mu} - \bar{v}^k)$; следовательно,

$$\bar{v}^{k+1} + \tilde{z}^k = \hat{v} - \lambda(\hat{v} - \bar{v}^k) + \lambda z^k = \lambda(\bar{v}^k + z^k) + (1 - \lambda)\hat{v} \in \text{co}\{\Pi_k, \hat{v}\},$$

что и требовалось доказать.

Из монотонности $\{\|\bar{z}^k\|\}$ следует существование предела $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{z}^k\| = \rho$; для сходимости алгоритма достаточно показать, что $\rho = 0$. Действительно, по построению $\bar{p}^k = \bar{v}^k + \bar{z}^k \in \text{epi } f^*$, $\bar{v}^k \notin \text{epi } f^*$. Если $\bar{z}^k \rightarrow 0$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{v}^k = (0, v_\bullet)$ с v_\bullet , существующей в силу монотонности $\{v_k\}$, принадлежит $\text{epi } f^*$. Следовательно, $f^*(0) \leq v_\bullet \leq f^*(0)$, или $v_\bullet = f^*(0)$, что и доказывает сходимость.

По построению $(\bar{p}^{k+1} - v^k)\bar{z}^k \leq \|\bar{z}^k\|^2$. Покажем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{p}^{k+1} - v^k)\bar{z}^k - \|\bar{z}^k\|^2 = 0$. Действительно, если предположить, что на некоторой подпоследовательности $(\bar{p}^{k+1} - v^k)\bar{z}^k \leq \|\bar{z}^k\|^2 - \gamma$, где $\gamma > 0$, то $\|\bar{z}^{k+1}\| = \min_{\bar{v}^k + z \in \text{co}\{\Pi_k, \hat{v}, \bar{p}^{k+1}\}} \|z\|^2 \leq \min_{\substack{\bar{v}^k + z = \lambda \bar{p}^k + (1 - \lambda)\bar{p}^{k+1}, \\ \lambda \in [0, 1]}} \|z\|^2$.

Учитывая равенство $\tilde{p}^k = v^k + \bar{z}^{k+1}$, получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}^{k+1}\|^2 &\leq \min_{\lambda \in [0, 1]} \|\lambda \tilde{x}^k + (1 - \lambda)(\bar{p}^{k+1} - \bar{v}^k)\|^2 \leq \\ &\leq \lambda^2 \|\tilde{x}^k\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\bar{z}^k(\bar{p}^{k+1} - \bar{v}^k) + (1 - \lambda)^2 \|\bar{p}^{k+1} - v^k\|^2 \leq \\ &\leq \lambda^2 \|\tilde{x}^k\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\|\bar{z}^k\|^2 - 2\gamma\lambda(1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2 \|\bar{p}^{k+1} - \bar{v}^k\|^2 \leq \\ &\leq (2\lambda - \lambda^2)\|\bar{z}^k\|^2 - 2\gamma\lambda(1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2 \|\bar{p}^{k+1} - \bar{v}^k\|^2 = \\ &= \|\bar{z}^k\|^2 - 2\gamma\lambda(1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2 (\|\bar{p}^{k+1} - \bar{v}^k\|^2 - \|\bar{z}^k\|^2) \leq \\ &\leq \|\bar{z}^k\|^2 - 2\gamma\lambda(1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2 (\|\bar{p}^{k+1} - \bar{v}^k\|^2 + \bar{z}^k\|^2) = \|\bar{z}^k\|^2 - 2\gamma\lambda(1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2 \Delta^2 \end{aligned}$$

для всех $\lambda \in [0, 1]$. Полагая $\lambda = (\Delta^2 + \gamma)/(\Delta^2 + 2\gamma) \in [0, 1]$, получаем

$$\|\bar{z}^{k+1}\|^2 \leq \|\bar{z}^k\|^2 - \gamma^2(\Delta^2 + \gamma)/(\Delta^2 + 2\gamma)^2 = \|\bar{z}^k\|^2 - \tau, \quad (6)$$

где $\tau = \gamma^2(\Delta^2 + \gamma)/(\Delta^2 + 2\gamma)^2 > 0$. Переходя в (6) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем противоречие.

Для завершения доказательства того, что $\bar{z}^k \rightarrow 0$, предположим противное. Пусть $\|\bar{z}^k\| \geq \tau\theta_k$ для некоторого $\tau > 0$, откуда, в частности, $\bar{z}_{n+1}^k \geq \tau\theta_k$. Так как $0 \leq (\bar{z}^k + \bar{v}^k)\bar{z}^k - \bar{p}^{k+1}\bar{z}^k \rightarrow 0$, то для произвольного $\gamma > 0$ при достаточно больших k выполнено $(\bar{z}^k + \bar{v}^k)\bar{z}^k - \bar{p}^{k+1}\bar{z}^k \leq \theta_k^2\gamma^2$. Тогда

$$\bar{v}^{k+1}\bar{z}^k \geq \bar{p}^{k+1}\bar{z}^k \geq \bar{v}^k\bar{z}^k + \|\bar{z}^k\|^2 - \theta_k\gamma \geq \bar{v}^k\bar{z}^k + \theta_k^2\tau^2 - \theta_k^2\gamma^2 \geq \bar{v}^k\bar{z}^k + \theta_k^2\tau^2/2$$

для $\gamma < \tau/\sqrt{2}$ или $\theta_k v_{k+1} \geq \theta_k v_k + \theta_k^2\tau^2/2$, откуда $f^*(0) \geq v_{k+1} \geq v_k + \theta_k\tau^2 \geq v_k + \delta$, где $\delta \geq \theta_k\tau^2 > 0$, что невозможно при $k \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

3. Вычислительные эксперименты. Описанный алгоритм был реализован на MATLAB-сходном языке ОСТАВЕ [8] и протестирован на ряде типичных примеров.

3.1. Кусочно-линейная целевая функция. В качестве теста рассматривались функции вида $f(x) = \max_{i=1,2,\dots,m} (a^i x + \beta_i)$. Здесь a^i — случайные векторы вида $a^i = \bar{a}^i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{a}^i$, где \bar{a}^i — векторы с равномерно распределенными на $[-1, 1]$ компонентами. Такой способ при достаточно большом $m > n + 1$ практически гарантирует существование у функции f конечного минимума. Случайные постоянные слагаемые β_i также генерировались как выборки из равномерного распределения, но на $[0, 1]$.

Во всех выполненных численных экспериментах метод получил решения в пределах машинной точности. Что касается глобального поведения алгоритма, то устойчиво наблюдалась линейная скорость

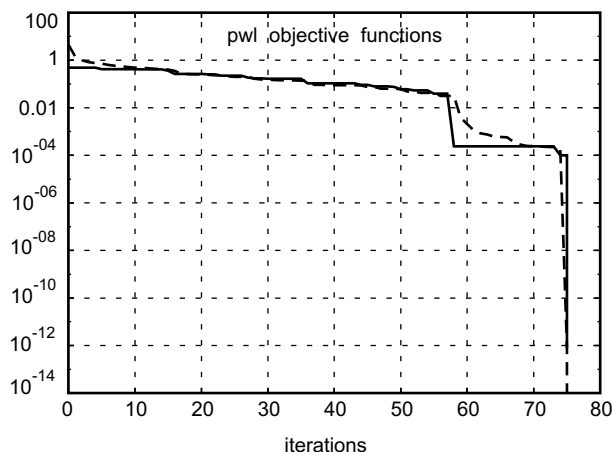


Рис. 1. Кусочно-линейная целевая функция.

Размерность — 50, количество линейных функций — 500. Сплошная линия — отклонения текущего рекорда значения целевой функции от оптимума; пунктирная — расстояние от точки, аппроксимирующей $f^*(0)$ до внутренней аппроксимации надграфика D_k

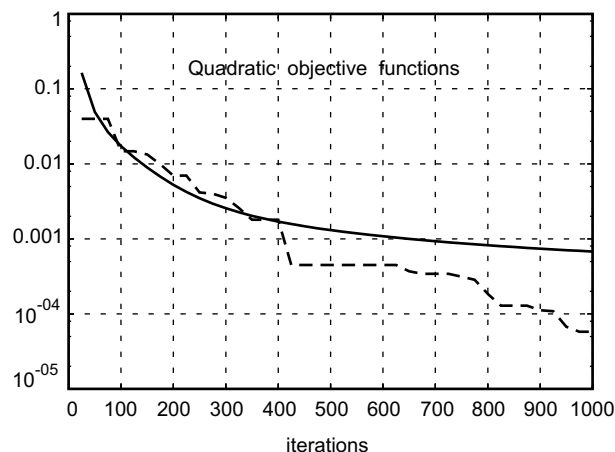


Рис. 2. Квадратичная целевая функция.

Размерность — 20. Сплошная линия — значения целевой функции, полученные при использовании градиентного метода; пунктирная — метод отделяющих плоскостей

убывания расстояния до внутренней аппроксимации надграфика, коррелирующая с убыванием целевой функции.

На рис. 1 в логарифмическом масштабе представлены сходимость $\|\bar{z}^k\|$ к нулю и отклонение рекорда целевой функции на k -й итерации от экстремума. Отметим близкий к линейному характер сходимости и довольно сильную корреляцию между этими двумя величинами. Характер сходимости напоминает поведение методов второго порядка для гладких задач — относительно медленное приближение к некоторой окрестности экстремума, а затем быстрый, напоминающий квадратичный спуск к точному решению.

3.2. Квадратичная целевая функция. Для этого теста (рис. 2) использовалась квадратичная функция n переменных вида $f(x) = 0.5(x - x_c)H(x - x_c)$, где $H = A^T A$ и A — матрица порядка n со случайными коэффициентами, генерируемыми стандартным датчиком случайных чисел, равномерно распределенных на $[0, 1]$. Компоненты вектора сдвига x_c равны 1. Хотя тест и представляется простым, задача, возникающая при n порядка 20–50, имеет, как показали проверки, обусловленность $10^5 - 10^6$, что отчасти объясняет относительно небольшую итоговую точность. Для сравнения приведены данные вычислительного эксперимента для градиентного метода с оптимальным шагом. Хотя в данном случае невозможно получить решение за конечное число итераций, как и для кусочно-линейного случая в основном наблюдается линейная скорость сходимости, превышающая, особенно на конечном этапе, скорость сходимости градиентного метода. Получить, однако, точность свыше 10^{-6} по функционалу не удалось, по всей видимости в связи с численными погрешностями, возникающими при проектировании.

Отметим, что процедура проектирования не имеет в настоящее время особых механизмов контроля точности и преодоления плохой обусловленности (работа в этом направлении будет продолжена).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1979.
2. Kiwiel K. Methods of descent for nondifferentiable optimization. Lecture Notes in Mathematics. **1133**. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
3. Hiriart-Urruty J.-B., Lemarechal C. Convex analysis minimization algorithm II. Advanced theory and bundle methods. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. **306**. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
4. Нурминский Е.А. Численные методы выпуклой оптимизации. М.: Наука, 1991.
5. Nurminski E.A. Separating plane algorithms for convex optimization // Mathematical Programming. 1997. **76**. 373–391.
6. Нурминский Е.А. Метод подходящих аффинных подпространств для проекции на симплекс // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2005. **45**, № 11. 1996–2004.
7. Нурминский Е.А. Метод аффинных подпространств для поиска вектора минимальной длины в симплексе // http://www.iacp.dvo.ru/lab_11/e-prints.
8. Octave Home Page // <http://www.octave.org>.

Поступила в редакцию 10.05.2006