РАВНОВЕСНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ - ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ И ИНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Е.А. Нурминский, Н.Б. Шамрай
nurmi@dvo.ru, shamray@dvo.ru

ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток

IV Всероссийская научная конференция "Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии"
ЭКОМОД-2009, г. Киров 6-12 июля 2009 г.

Сети как модели

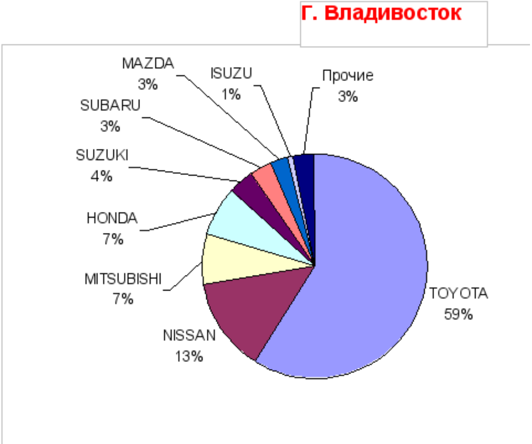
Особенности сетей

- протяженный и топологически сложный характер;
- использование многими агентами, зачастую имеющими конфликтующие интересы;
- отсутствующее или неполностью контролирующее ситуацию системное управление.

Типичные примеры

- транспортные сети межрегионального сообщения;
- улично-дорожные сети (УДС) больших городов;
- телекоммуникационные сети.

Автопарк г. Владивостока

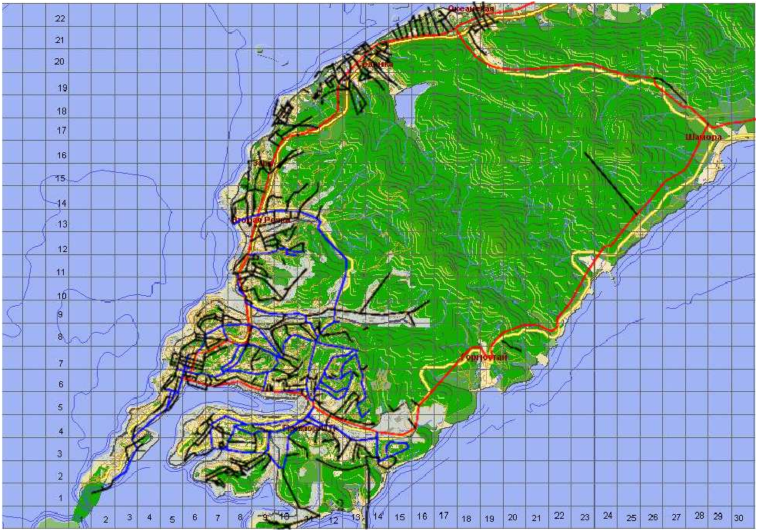


Общее количество автомобилей – ок. 180 тыс. (2007 г), из них ок. 155 тыс – легковые автомобили в личном пользовании.

Советская градостроительная норма	60 авт/тыс
Владивосток	336 авт/тыс
Российские миллионники	300-350 авт/тыс
Европейская норма	400 авт/тыс

УДС г. Владивостока

УДС г. Владивостока



УДС г. Владивостока

Таблица: Параметры сети

Листьев (терминальных вершин)	1274
Вершин степени 2	241
Вершин степени 3	2521
Вершин степени 4	245
Вершин степени 5	9
Всего вершин	4290
Всего вершин без транзитных	4049
Всего дуг	5172
Протяженность дорог (км)	1143.37
Среднее расстояние между перекрестками (м)	412.026

Поведенческие принципы Вардропа

1. Пользователи сети ведут некооперативное соревнование за сетевые ресурсы с целью минимизации своих индивидуальных транспортных расходов (UO).
2. Пользователи сети выбирают маршрут следования, исходя из минимизации общих расходов в сети (SO).

Первоисточники:

Wardrope J.G. Some theoretical aspects of road traffic research Proc. of the Inst. of Civil. Eng, Part II, 1952, 1, pp. 325-378.

Beckmann M., McGuire C.B., Winsten C.B., Studies in the economics of transportation RM-1488. Santa Monica: RAND Corporation, 1955.

Математическая формализация: обозначения

$\Gamma = (V, E)$ – транспортная сеть, V – вершины, $E \subset V \times V$ – дуги сети;

$W = \{w = (i, j) : i, j \in V\}$ – множество пар источник-сток;

$p = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ – путь из v_1 в v_m, если $(v_k, v_{k+1}) \in E$,
$k = 1, 2, \dots, m-1$;

P_w — множество путей, соединяющих $w \in W$;

$P = \bigcup_{w \in W} P_w$ — совокупность всех путей в сети Γ;

x_p – величина потока по пути p, $x = (x_p : p \in P)$;

$G_p(x)$ – удельные затраты на проезд по пути p, $G(x) = (G_p(x) : p \in P)$;

y_e – величина потока по дуге e, $y = (y_e : e \in E)$;

$\tau_e(y)$ – удельные затраты на проезд по дуге e.

Математическая формализация: модельные соотношения

Нагрузки на дуги

$$y_e = \sum_{p \in P} \delta_{pe} x_p, \text{ где } \delta_{pe} = \begin{cases} 1, & \text{путь } p \text{ содержит дугу } e \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Математическая формализация: модельные соотношения

Нагрузки на дуги

$$y_e = \sum_{p \in P} \delta_{pe} x_p, \text{ где } \delta_{pe} = \begin{cases} 1, & \text{путь } p \text{ содержит дугу } e \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Затраты на дуге

$$\tau_e(y_e) = \tau_0 \left(1 + \left(\frac{y_e}{c_e}\right)^n\right), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Математическая формализация: модельные соотношения

Нагрузки на дуги

$$y_e = \sum_{p \in P} \delta_{pe} x_p, \text{ где } \delta_{pe} = \begin{cases} 1, & \text{путь } p \text{ содержит дугу } e \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Затраты на дуге

$$\tau_e(y_e) = \tau_0 (1 + \left(\frac{y_e}{c_e}\right)^n), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Затраты по пути

$$G_p(x) = \sum_{e \in E} \delta_{pe} \tau_e(y_e)$$

Математическая формализация: равновесие

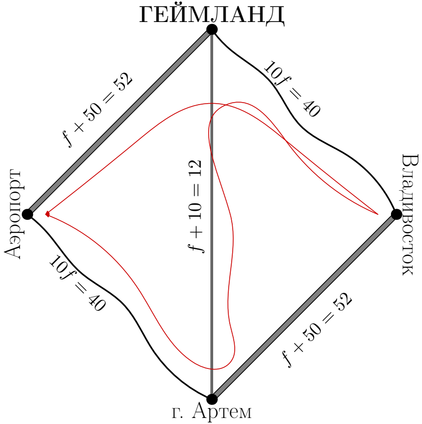
UO: *пользователи сети ведут некооперативное соревнование за сетевые ресурсы с целью минимизации своих индивидуальных транспортных расходов.*

Принцип равновесия

Распределение потоков $x^\star = \{x_p^\star,\ p \in P\}$ называется равновесным, если для каждого $p \in P_w$ из $x_p^\star > 0$ следует

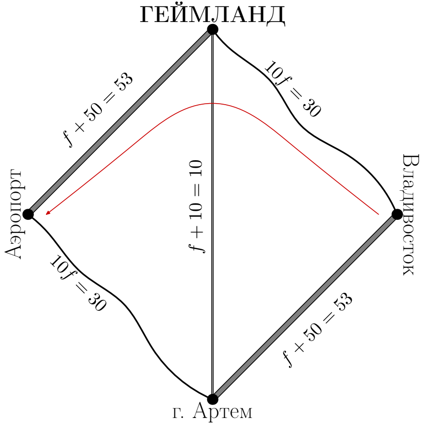
$$G_p(x^\star) = u_w(x^\star) = \min_{q \in P_w} G_q(x^\star).$$

Равновесие и системный оптимум



Система – 552.0

Пользователь – 92.0



Система – 498.0

Пользователь – 83.0

Математическая формализация: ограничения

Неотрицательность

$$x_p \geq 0, \quad p \in P.$$

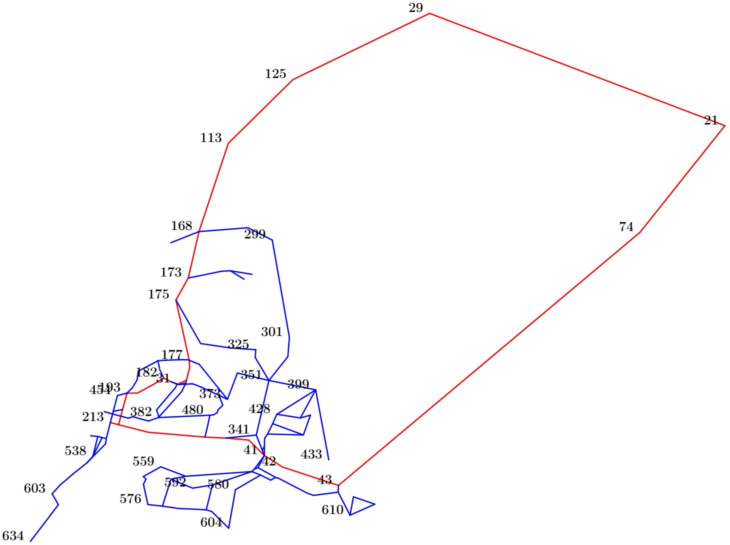
Балансы

$$\text{Фиксированный спрос:} \quad \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, \qquad w \in W;$$

$$\text{Эластичный спрос:} \quad \sum_{p \in P_w} x_p = d_w(u_w(x)), \quad w \in W.$$

Графовая модель УДС г. Владивостока

Графовая модель УДС г. Владивостока



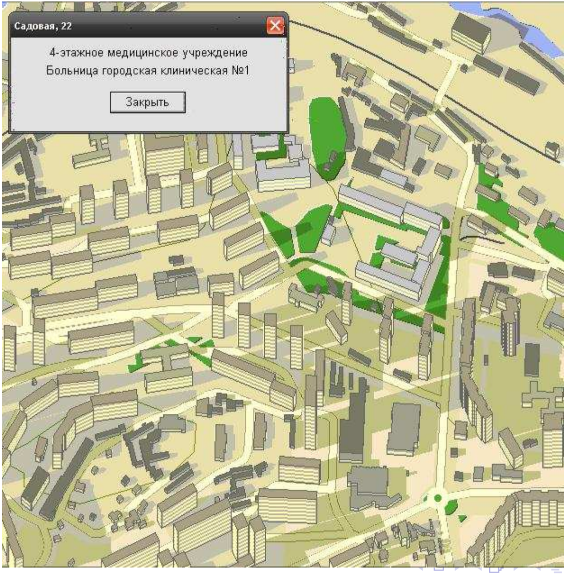
Графовая модель УДС г. Владивостока

Таблица: Параметры сети и размерность задачи

Всего вершин	164
Ориентированных дуг	380
Пунктов отправления/прибытия	37
Всего пар $w = (i, j)$	1369
Путей для каждой пары w	≤ 5
Всего потоковых переменных по путям x_p	6624
Всего потоковых переменных по дугам y_e	380
Балансовых ограничений	1369

Матрицы отправления и прибытия

Матрицы отправления и прибытия



Матрицы отправления и прибытия

Таблица: Зависимость числа проживающих от этажности дома

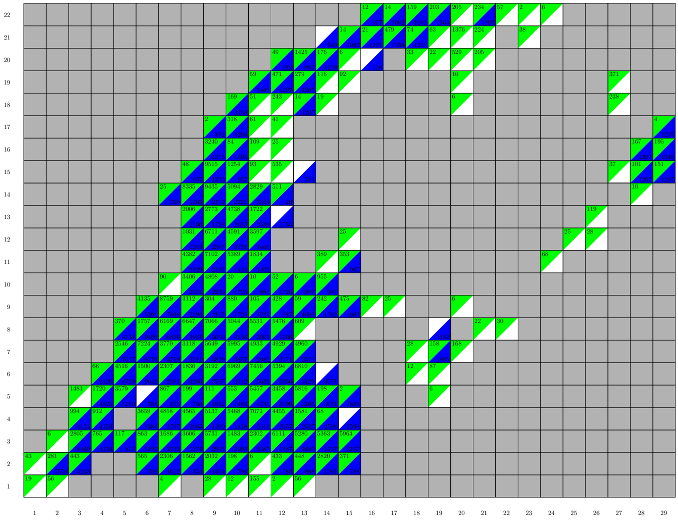
Число этажей	Число людей	Число этажей	Число людей
частные дома	2	1	10
2	30	3	45
4	96	5	150
6	180	7	224
8	280	9	315
10	320	11	352
12	384	13	312
14	336	15	360
16	384	17	408
20	624		

Матрицы отправления и прибытия

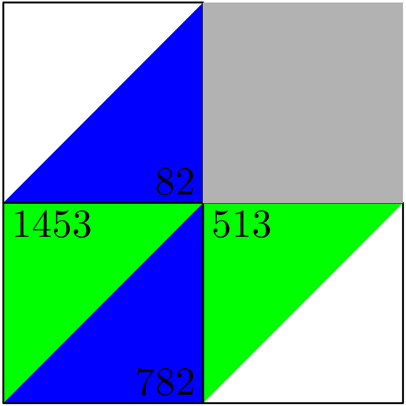
Источники данных:

1. Форпост у океана - Владивосток (статистический ежегодник с исторической справкой). – Владивосток: Издательство Примстат, 2008.
2. Здравоохранение и социальное обеспечение в Приморском крае (статистический сборник). – Владивосток: Издательство Примстат, 2008.
3. Труд и занятость населения во Владивостоке (статистический сборник). – Владивосток: Издательство Примстат, 2008.
4. Рынок труда Владивостока (статистический бюллетень). – Владивосток: Издательство Примстат, 2009.
5. О состоянии образования во Владивостоке (аналитическая записка). – Владивосток: Издательство Примстат, 2009.
6. Паспорт города : `htpp://www.vlc.ru`

Матрицы отправления и прибытия



Матрицы отправления и прибытия



Матрицы отправления и прибытия

Результаты подсчета

Численность постоянного населения г.Владивостока составляет 578800 человек (2008 г).

Расчеты по матрице отправлений – 587768.

Ошибка — 8968 (1.5%)

Матрица корреспонденций

$i = 1, \dots, m$ – пункты отправления, $j = 1, \dots, n$ – пункты прибытия;
S_i – число индивидов в i, D_j – число рабочих мест в j;
c_{ij} – затраты на передвижение из i в j;
T_{ij} – корреспонденция из i в j.

Энтропийные модели

$$\min \left(\sum_{i,j} T_{ij} c_{ij} + \beta \sum_{i,j} \ln T_{ij} \right), \ \sum_{i=1}^{m} T_{ij} = D_j, \ \sum_{j=1}^{n} T_{ij} = S_i, \ \ T_{ij} \geq 0.$$

Матрица корреспонденций

$i = 1, \ldots, m$ – пункты отправления, $j = 1, \ldots, n$ – пункты прибытия;
S_i – число индивидов в i, D_j – число рабочих мест в j;
c_{ij} – затраты на передвижение из i в j;
T_{ij} – корреспонденция из i в j.

Энтропийные модели

$$\min \left(\sum_{i,j} T_{ij} c_{ij} + \beta \sum_{i,j} \ln T_{ij} \right), \ \sum_{i=1}^{m} T_{ij} = D_j, \ \sum_{j=1}^{n} T_{ij} = S_i, \ \ T_{ij} \geq 0.$$

Гравитационные модели

$$T_{ij} = A_i B_j S_i D_j f(c_{ij}), \ A_i = 1 / \sum_{j=1}^{n} B_j D_j f(c_{ij}), \ B_j = 1 / \sum_{i=1}^{m} A_i S_i f(c_{ij}),$$

Гравитационная модель

$$f(c_{ij}) = \exp\{-\beta c_{ij}\},$$

$c_{ij} = L_{ij}/v$ – временные затраты на передвижение из i в j,
$v = 30$ км/ч, L_{ij} – кратчайший путь (км) в сети из i в j,
$\beta = 0.065$ – параметр калибровки.

Таблица: Сравнение расчетных данных и данных наблюдений

Направление въезда	Набл.	Расчет	Откл.
Первомайский р-н	2672	(30979/4)*0.336 = 2602	70
Фрунзенский р-н	2924	(42146/4)*0.336=3540	-616

Задача нелинейной комплементарности

Условия равновесия

$$G_p(x^\star) = u_w(x^\star) = \min_{q \in P_w} G_q(x^\star).$$

Допустимое множество $X = \{x \geq 0 : \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, w \in W\}$.

Задача нелинейной комплементарности

$$\begin{gathered} x_p \geq 0, \quad H_p(x,u) = G_p(x) - u_w(x) \geq 0, \\ x_p H_p(x,u) = 0; \\ p \in P_w, \quad w \in W, \quad x \in X. \end{gathered} \tag{1}$$

Вариационные неравенства

Найти $x^\star \in X$ такие, что

$$G(x^\star)(x - x^\star) \geq 0 \quad \text{для любого } x \in X, \tag{2}$$

- X — подмножество E^n (выпуклое, замкнутое ...);
- $G(x)$ — отображение $X \to E^n$ (непрерывное, монотонное, строго монотонное, коэрцитивное ...);

Утверждение

Задача нелинейной комплементарности

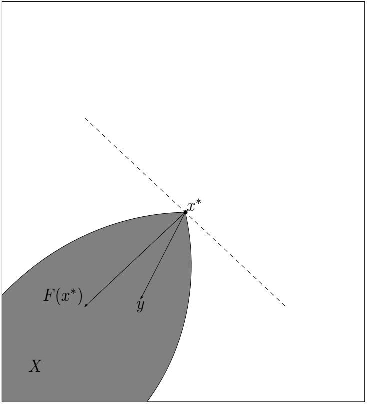
$$x_p^\star \geq 0, \quad H_p(x^\star, u) = G_p(x^\star) - u_w(x^\star) \geq 0, \; x_p^\star H_p(x^\star, u) = 0,$$
$$p \in P_w, \quad w \in W, \quad x^\star \in X.$$

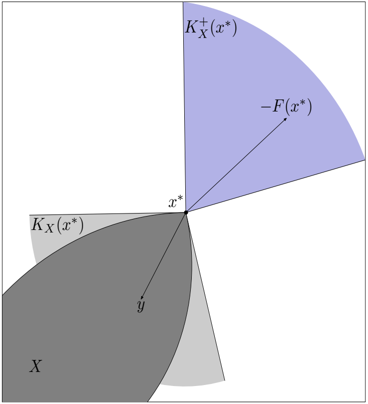
эквивалентна решению вариационного неравенства (2).

Выпуклая геометрия

Пусть $x^\star \in X$ и $K_X^+(x^\star)$ — конус, сопряженный конусу допустимых направлений множества X в точке $x^\star$. Тогда

$$G(x^\star)(y - x^\star) \geq 0 \quad \text{для} \quad \forall y \in X \Leftrightarrow -G(x^\star) \in K_X^+(x^\star)$$





Проективные уравнения

Проективные уравнения:

$$x = \Pi_X(x - \lambda G(x)), \quad \lambda > 0 \tag{3}$$

Простая итерация:

$$x^{k+1} = \Pi_X(x^k - \lambda G(x^k)), \quad \lambda \in (0, \tau), \tag{4}$$

$G(x)$ сильно монотонно;

Экстраградиентный метод:

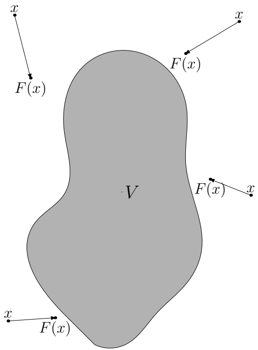
$$\begin{aligned} y^{k+1} &= \Pi_X(x^k - \lambda G(x^k)) \\ x^{k+1} &= \Pi_X(x^k - \lambda G(y^{k+1})) \end{aligned} \tag{5}$$

$G(x)$ — монотонно.

Фейеровские операторы

Определение. *Оператор F будем называть фейеровским, если для любого x $\|F(x) - v\| \leq \|x - v\|$ для всех $v \in V, x \in \bar{x} + U$.*

Определение. *Фейеровский оператор F будем называть локально сильно фейеровским, если для любого $\bar{x} \notin V$ существует окрестность нуля U и число $\alpha \in [0, 1)$ такие, что $\|F(x) - v\| \leq \alpha\|x - v\|$ для всех $v \in V, x \in \bar{x} + U$.*



Фейеровские процессы

Фейеровский процесс:

$$x^{k+1} = F(x^k), k = 0, 1, \dots \tag{6}$$

где F принадлежит одному из подклассов фейеровских операторов относительно заданного множества V,

Теорема. *Пусть* V *— замкнуто и ограничено,* F *— локально сильно фейеровский, последовательность* $\{x^k\}$*, полученная с помощью рекуррентных соотношений (6) с произвольным* x^0*, ограничена. Тогда все предельные точки* $\{x^k\}$ *принадлежат множеству* V*.*

Фейеровские процессы с малыми возмущениями

Фейеровский процесс с малыми возмущениями:

$$x^{k+1} = F(x^k + z^k), k = 0, 1, \dots \tag{7}$$

где F принадлежит одному из подклассов фейеровских операторов относительно заданного множества V,

Теорема. *Пусть V — замкнуто и ограничено, F — локально сильно фейеровский, последовательность $\{x^k\}$, полученная с помощью рекуррентных соотношений (6) с произвольным x^0, ограничена, $z^k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда все предельные точки $\{x^k\}$ принадлежат множеству V.*

Семейства фейеровских операторов

Теорема. *Пусть $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ — семейство операторов P_i таких, что для любой $x \notin V$ существует P_i, локально сильно фейеровский в x, $z^k \to 0$ при $k \to \infty$ и $F_k = P_{i_k}$, где P_{i_k} — локально сильно фейеровский в x^k оператор. Тогда, если последовательность $\{x^k\}$, построенная по правилу*

$$x^{k+1} = F_k(x^k + z^k), \quad s = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

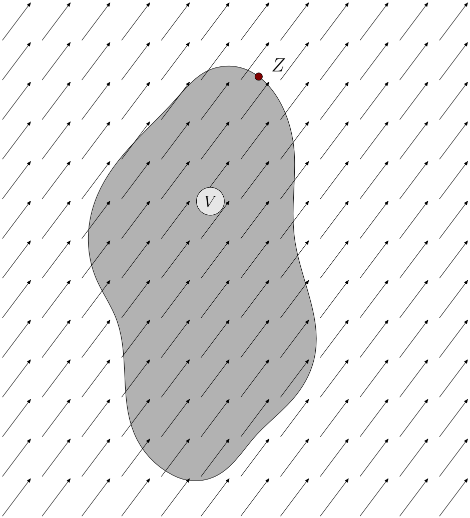
ограничена, то все ее предельные точки принадлежат V.

Резюме: Малые возмущения не препятствуют сходимости (сильно) фейеровских процессов.

Аттрактанты

Определение. *Точечно-множественное отображение* $\Phi : V \to E$ *называется локально сильным аттрактантом множества* $Z \subset V$, *если для любого* $x' \in V \setminus Z$ *существует окрестность нуля* U *такая, что* $g(z - x) \geq \delta > 0$ *для всех* $z \in Z, x \in x' + U, g \in \Phi(x)$ *и некоторого* $\delta > 0$.

Векторное поле аттрактанта



F-процессы с аттрактантами

Стационарный:

$$x^{k+1} = F(x^k + \lambda_k \Phi(x^k)). \tag{9}$$

Нестационарный:

$$x^{k+1} = F_k(x^k + \lambda_k \Phi(x^k)). \tag{10}$$

Результат теории малых возмущений: как (9) так и (10) сходятся к V при $\lambda_k \to 0$ когда $k \to \infty$.

Сходимость

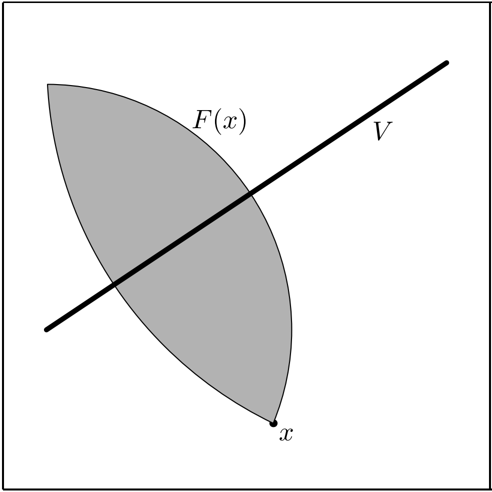
Теорема. *Пусть F — локально сильно фейеровский оператор, Φ — локально сильный аттрактант $Z \subset V$, полунепрерывный сверху на некотором открытом $\tilde{V} \supset V$ и последовательность $\{x^k\}$, построена по правилу*

$$x^{k+1} = F(x^k + \lambda_k \Phi(x^k)), \tag{11}$$

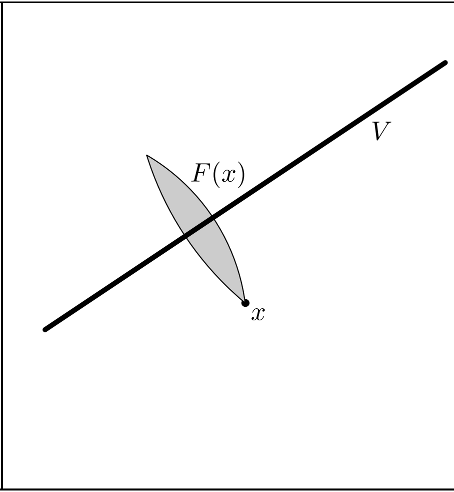
где начальное состояние x^0 произвольно, $\lambda_k \to +0, \sum \lambda_k = \infty$. Тогда, если $\{x^k\}$ ограничена, то любая предельная точка $\{x^k\}$ принадлежит Z.

Резюме: С помощью аттрактантов можно направить фейеровские процессы в нужную часть притягивающего множества.

Фейеровские операторы и проектирование



Точка x "далеко" от V .



Точка x "близко" к V .

Последовательное проектирование

Пусть

$$V = \cap_{\tau \in T} V_\tau,$$

$V_\tau, \tau \in T$ — выпуклые замкнутые подмножества E.

Теорема. *Пусть V - замкнутое ограниченное множество, представимое в виде пересечения конечного или бесконечного семейства выпуклых множеств: $V = \cap_{\tau \in T} V_\tau$ и обозначим через $\Pi_\tau(x) = x_\tau$ проекцию точки x на V_τ. Тогда, если $x \notin V_{\tau'}$, для некоторого $\tau' \in T$, то оператор $F = \Pi_{\tau'}$ является локально сильно фейеровским в точке x.*

Метод последовательного проектирования

Задача

$$\min_{x \in V} f(x), V = \cap_{i=1}^{N} V_i.$$

Метод последовательных проекций градиента:

$$x^{k+1} = F_k(x^k - \lambda_k g^k),\ \ g^k \in \partial f(x^k)$$

где $F_k(x) = \Pi_{i_k}(x)$, а i_k такого, что $x^k \notin V_{i_k}$.

Параллельное проектирование

Пусть

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} w_i \Pi_i(x), \tag{12}$$

где Π_i — проекция на множества V_i,
$w = (w_1, w_2, \dots, w_N) \in \Delta_N = \{w : w_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} w_i = 1\}$.

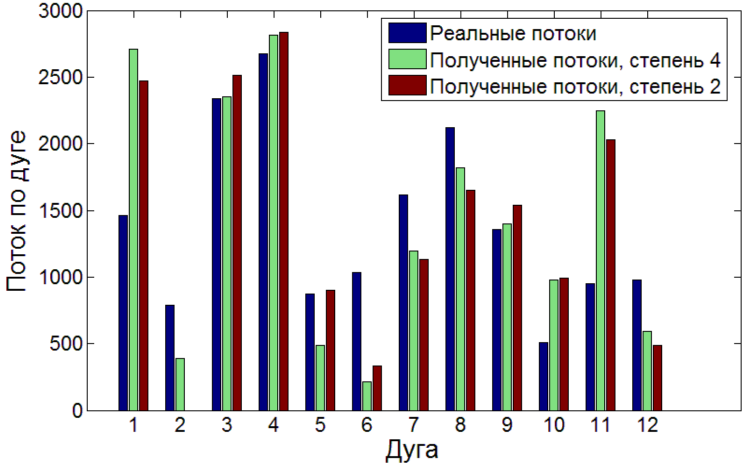
Теорема. *Пусть для оператора F, заданного соотношением (12) имеет место $\sum_{i:x \notin V_i} w_i \geq \gamma > 0$. Тогда $F(x)$ в точке x является локально сильно фейеровским.*

Численные расчеты

Таблица: Потоки по основным дугам транспортной сети г.Владивостока

№	Место	Наблюдение	Расчет
1	ост. Луговая - ост. Баляева	1463	2711
2	ост. Баляева - ост. Луговая	792	385
3	ост. Луговая - ост. Гайдамак	2336	2350
4	ост. Гайдамак - ост. Луговая	2677	2813
5	ост. Некрасовская - 3-я Рабочая	870	485
6	3-я Рабочая - ост. Некрасовская	1031	212
7	ост. Гоголя - 3-я Рабочая	1618	1194
8	ост. 3-я Рабочая - ост. Гоголя	2119	1817
9	ул. Алеутская, поток в Центр	1353	1400
10	ул. Алеутская, поток из центра	508	979
11	Океанский пр., поток в Центр	948	2246
12	Океанский пр., поток из Центра	975	591

Численные расчеты



Эффективная проекция

В первую очередь надо уметь хорошо вычислять $\Pi_X(x)$. Начнем с задачи

$$\min \|x\|^2, \; x \in \mathrm{co}\,\{\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots \hat{x}^N\}.$$

Эквивалентная формулировки:

$$\min \|Xu\|^2 = \min uX^TXu = \min uHu$$

где $u \in \Delta = \{u \geq 0\} \cap \{ue = 1\}$.

Проблемы традиционных подходов

- Квадратичное программирование с линейными ограничениями:

$$\min \|x\|^2$$
$$x - \sum_{i=1}^{N} u_i \hat{x}^i = 0, u \in \Delta$$

— вырожденная квадратичная форма, много ограничений/переменных;

- Барицентрические координаты только:

$$\min \|Xu\|^2 = \min uX^T Xu = \min uHu, \;\; u \in \Delta$$

— вырожденность при $dim(u) > dim(x)$.

ESC-управление шагом

		Minos		Loqo		Snopt	
n	m	z	iter	z	iter	z	iter
25	50	0.00366158	178	0.0036626	22	0.00366158	72
25	100	0.00234927	204	0.00234973	27	No*	No*
25	200	0.000849361	254	0.000857091	27	0.000851781	132
50	100	0.00306935	391	0.00307067	23	0.00306928	183
50	200	0.00209376	513	0.00209666	31	No*	No*
100	200	4.18052**	108**	0.0030589	24	0.00305631	399

Полиэдральная функция без ограничений

Найти

$$\min f(x), x = (x_1, x_2)$$

где

$$f(x) = \max\{y_i(x), i = 1, 2, 3\}, \tag{13}$$

$$y(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & -0.4 \\ -3 & 0.2 \end{vmatrix} x.$$

Задачи имеет тривиальное решение $x^\star = (0, 0)$ с $f(x^\star) = 0$.
Множитель Шора-Гамбурда $q_f = 0.997785$ $(q_f^{500} = 0.33)$.

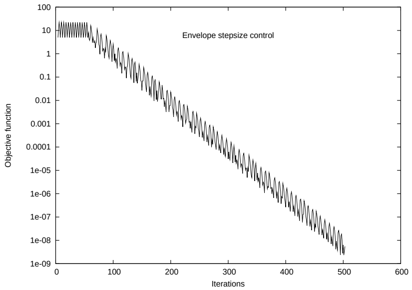


Рис.: Субградиентный метод с ESC. Множитель $q = 0.5$. Целевая функция (слева) и расстояние до оптимума (справа).

За 500 итераций шаг метода и погрешность решения уменьшилась в 10^9 раз.

Выпуклая задача, квадратичные ограничения

$$\begin{aligned} \min f(x) = \min \max_{i=1,2,3} \textstyle\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \\ \|x - e^1\|^2 - 4 = h_1(x) \le 0, \\ \|x - e^2\|^2 - 4 = h_2(x) \le 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где $e^1 = (1, 0, 0), e^2 = (-1, 0, 0)$, матрица

$$A = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Оптимум: -3.05714794

$$x^{\star} = (0, -0.33968, -1.69841).$$

$X = X_1 \cap X_2, \; X_i = \{x : h_i(x) \le 0\}, \; i = 1, 2$

Метод последовательного проектирования

На k-ой итерации:

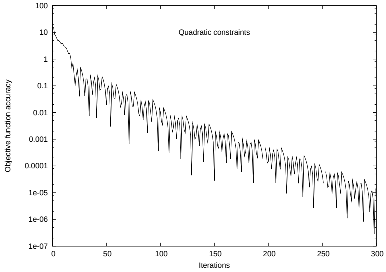
- Шаг по градиенту:

$$\bar{x}^k = x^k - \lambda_k g^k;$$

- Фейеровский шаг:

$$x^{k+1} = F_k(\bar{x}^k) = \begin{cases} \Pi_{\iota_k}(\bar{x}^k), & h_{\iota_k}(\bar{x}^k) = \max\{h_1(\bar{x}^k), h_2(\bar{x}^k)\} > 0, \\ \bar{x}^k & h_1(\bar{x}^k), h_2(\bar{x}^k) \le 0 \end{cases}$$

$\Pi_i(x)$ — проекция точки x на X_i.



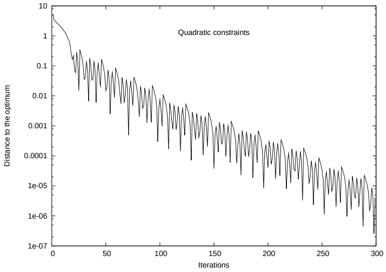
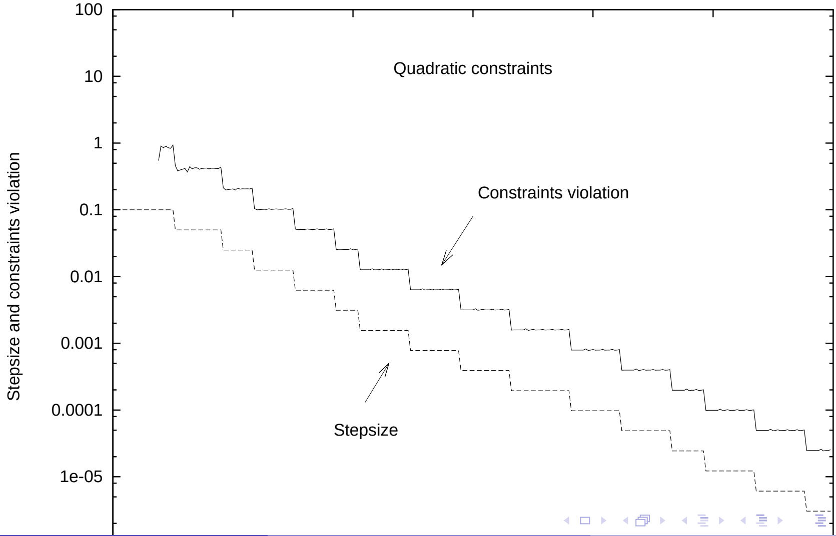
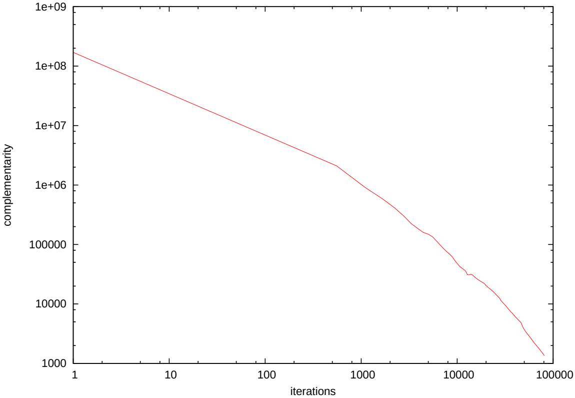


Рис.: Сходимость по целевой функции и расстоянию до оптимума

Динамика шагового множителя



Сходимость условия комплементарности



72 пары источник-сток, 10 маршрутов на пару.

Транспортные сети

Транспортные сети

Стенбринк П.А. Оптимизация транспортных сетей .- М.:Транспорт, 1961

Фейеровские процессы с малыми возмущениями

- Нурминский Е.А. *Фейеровские процессы с малым возмущением//* Доклады АН, т. 422, вып. 5, 2008, С. 601-604.
- Е.А. Нурминский *Декомпозиция и параллелизация вычислительных процессов на основе фейеровских процессов с малым возмущением* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 2008, т. 48, вып. 12, С. 2121-2128.
- Шамрай Н.Б. *Метод последовательных проекций для решения вариационных неравенств* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики – статья в редакции.
- Nurminski E.A. *Envelope stepsize control for iterative algorithms based on Fejer processes with attractants* // Optimization Methods and Software, accepted for publication.

Электронные копии доступны по адресу `http://elis.dvo.ru/~lab_11`.