ЗАДАЧА ПРОЕКЦИИ — ТЕОРИЯ, АЛГОРИТМЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Е.А. Нурминский

Институт автоматики и процессов управления
Дальневосточного отделения РАН

Владивосток

Екатеринбург 2007 г.

Постановки

Основная задача:

$$\min_{x \in C} \|x\|^2,$$

$x \in E_n, \; C$ — замкнуто, выпукло.

Приложения: обработка сигналов, электронная микроскопия, компьютерная томография, оптимизационные алгоритмы, поиск неподвижных точек, задачи равновесия, ...

Схемы декомпозиции:

$$C = \begin{cases} \mathrm{co}\{C_i, i = 1, 2, \ldots\}, \\ \bigcap\limits_{i=1,2,\ldots} C_i, \end{cases}$$

C_i — "простые" множества.

Общие схемы

Итеративный подход:

$$x^{k+1} = A_k x^k, \quad A_k = \sum_{i \in N_n} \lambda_i^k \{(1 - \alpha_i^k) I + \alpha_i^k T_i^k\},$$

где I — тождественный оператор, T_i^k — оператор "притяжения" (Flam, Zowe; BIT, 1990).

Свойства отображений

— Крепко нерасширяюшие (firmly nonexpansive):

$$T = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}Q, \text{ где } Q \text{ — нерасширяющее.}$$

— Притягивающее:

$$\|Tx - f\| < \|x - f\| \text{ для любых } x \notin F \text{ и } f \in F.$$

— α–притягивающее :

$$\alpha\|x - Tx\|^2 \leq \|x - f\|^2 - \|Tx - f\|^2 \text{ для любых } x \text{ и } f \in F.$$

Утверждение. *Если T — крепко нерасширяющее и $\alpha \in (0, 2)$ то $T_\alpha = (1 - \alpha)I + \alpha T$ — $(2 - \alpha)/\alpha$–притягивающее по отношению к множеству неподвижных точек T.*

Композиции отображений

Утверждение. *Пусть* T_i *—* α_i*–притягивающее,* $i = 1, 2, \ldots, N$. *Тогда* $T = \prod_{i=1}^{N} T_i$ *—* α*–притягивающее, где* $\alpha = (\min_{i=1,2\ldots,N} \alpha_i)/2^{N-1}$.

Утверждение. *Пусть* T_i *—* α_i*–притягивающее,* $i = 1, 2, \ldots, N$, $\lambda \in \Delta^0$. *Тогда* $T = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i T_i$ *—* α*–притягивающее, где* $\alpha = \min_{i=1,2\ldots,N} \alpha_i$.

Замечание. *В обеих случаях речь идет о притяжении к множеству неподвижных точек* $\mathcal{F}(T)$ *оператора* T *и в обеих случаях* $\mathcal{F}(T) = \bigcap_{i=1}^{N} \mathcal{F}(T_i)$.

Проекция на полиэдр во внутреннем представлении

Стандартный симплекс:

$$\Delta = \{\lambda : \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Полиэдр C во внутреннем представлении:

$$C = \mathrm{co}\,\{c^i, i = 1, 2, \ldots, N\} = \{c = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i c^i, \lambda \in \Delta\}.$$

Простейшие алгоритмы

Инициализация. $x_0 \in C$ — произвольно, $k = 0$.

Итерация алгоритма.

$$c^{i_k} x^k = \min_{i=1,2,\ldots,N} c^i x^k, \quad x^{k+1} = \gamma_k c^{i_k} + (1-\gamma_k) x^k,$$

где γ_k — решение задачи

$$\min_{\gamma \in [0.1]} \|\gamma c^{i_k} + (1-\gamma) x^k\|$$

Увеличиваем счетчик итераций $k \to k+1$ и т.д.

(Демьянов, Малоземов (1974), P. Wolfe (1976) ...)

Численные эксперименты

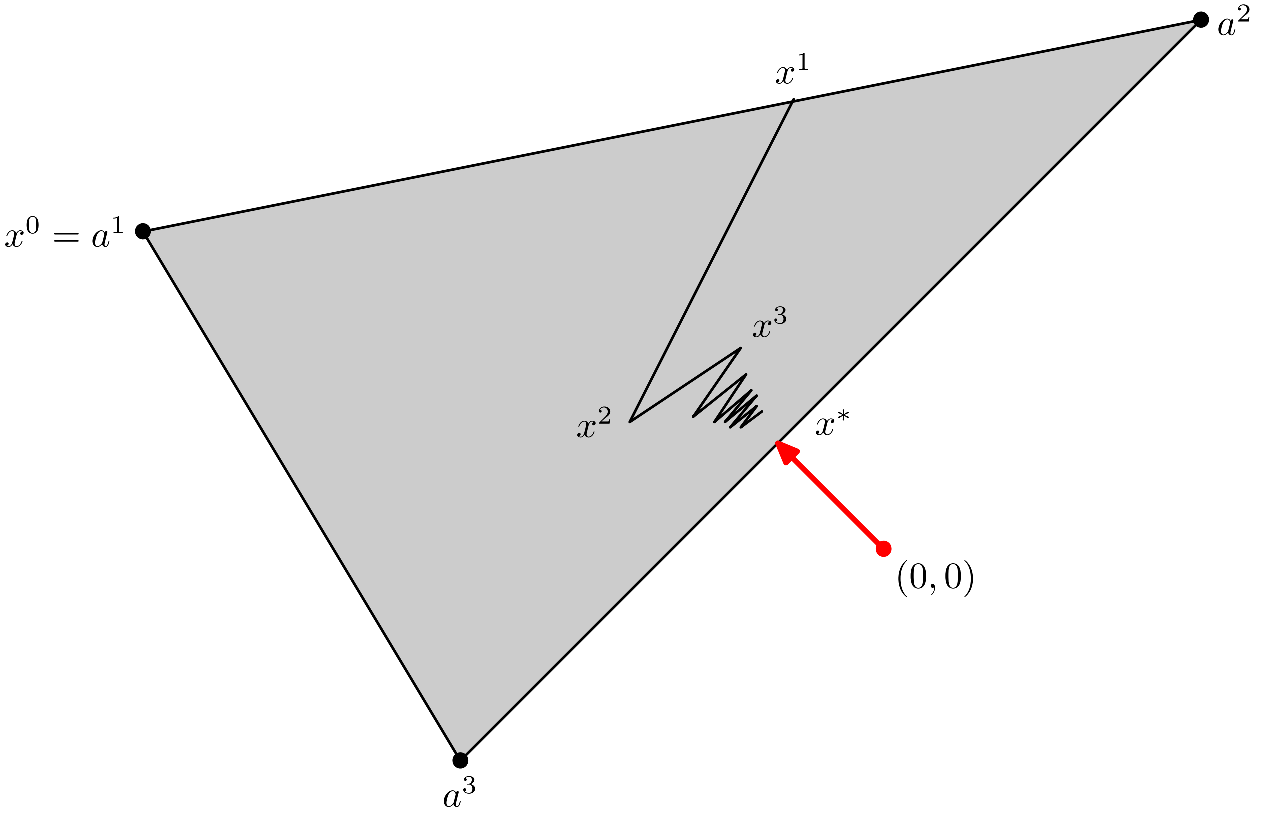

Рис. 1: Иллюстрация работы простейшего алгоритма.

Численные эксперименты

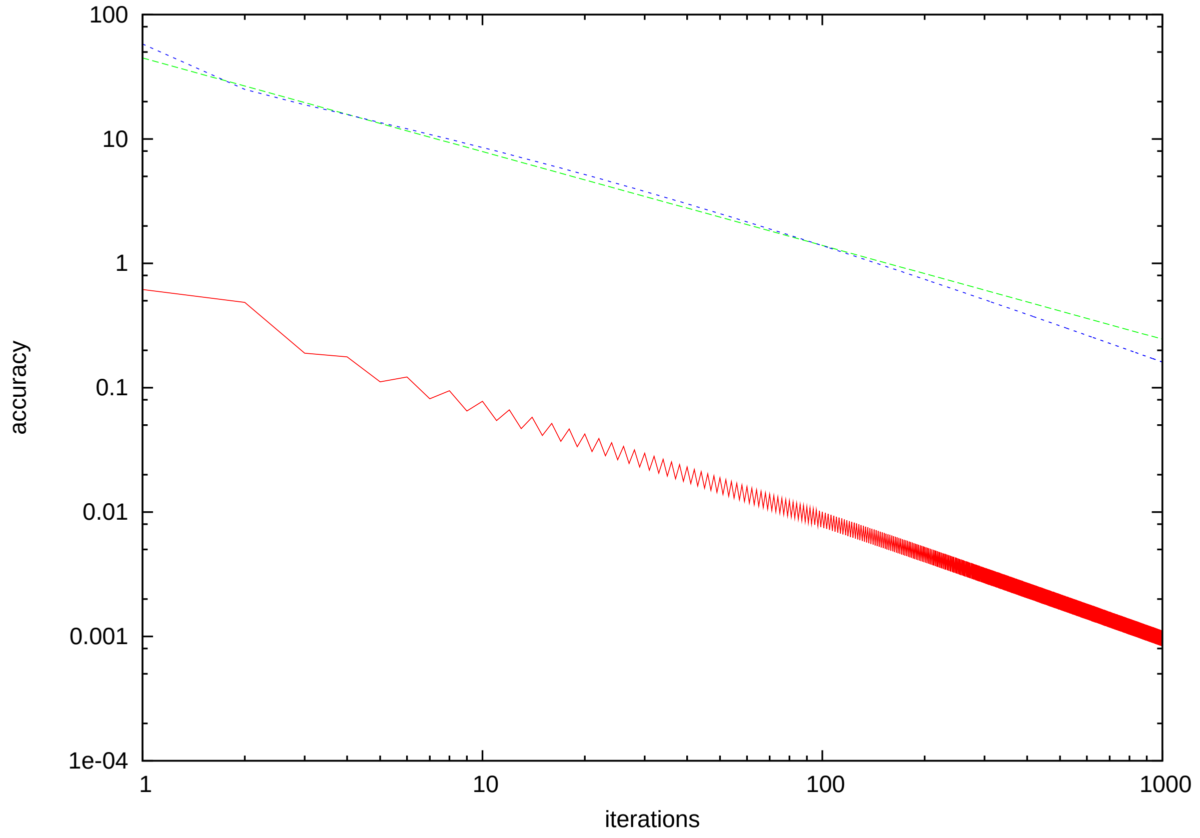

Рис. 2: Сходимость простейшего алгоритма.

$$\epsilon_k \approx k^b, \ b = -0.754085.$$

Метод подходящих аффинных подпространств

Инициализация алгоритма. Выбирается H_k, $k = 0$

Основной цикл алгоритма.

1. **Проекция на подпространство H_k.** Решаем задачу

$$\min_{z \in H_k} \|z\|^2 = \|z^k\|^2. \tag{1}$$

2. **Внутренний цикл построения нового базиса.**
   Выберем произвольный i_k такой, что

$$c^{i_k} x^k < \|x^k\|^2, \tag{2}$$

   построим $H_{k+1} = \mathrm{aff}\,(H_k, c^{i_k})$, подправим, если нужно.

3. $k \to k+1$.

Подробности: ЖВМиМФ, 2005, т.45, вып. 11, с. 1996-2004.

Свойства метода

1. Конечная сходимость.
2. Глобально линейная скорость.

Тест:

$$C = \mathrm{co}\,\{c^k, k = 1, 2, \ldots, N\} + \delta e^n$$

где $c^k \in E^n$ — случайные вектора, строящиеся по правилу

$$c_i = \begin{cases} \sigma(\xi_i - 0.5), & \text{если } i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \sigma^{-1}\xi_n, & \text{если } i = n, \end{cases}$$

с независимыми $[0, 1]$ сл. вел. σ — параметр масштабирования, δ — параметр сдвига.

Численные эксперименты

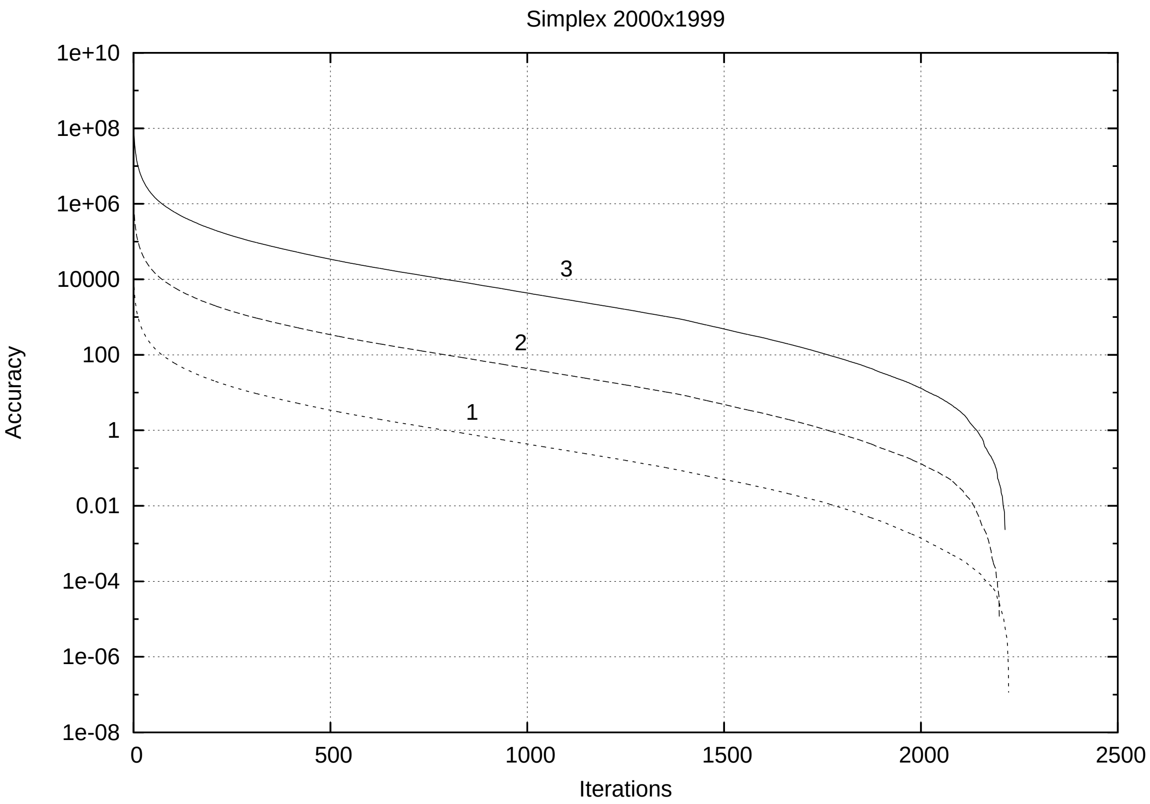

Рис. 3: 2000-мерный симплекс с 1999 вершинами. Сходимость по норме. Кривые $1 - \sigma^2 = 10$, $2 - \sigma^2 = 1000$, $3 - \sigma^2 = 10000$, параметр сдвига $\delta = 0.001$.

Численные эксперименты

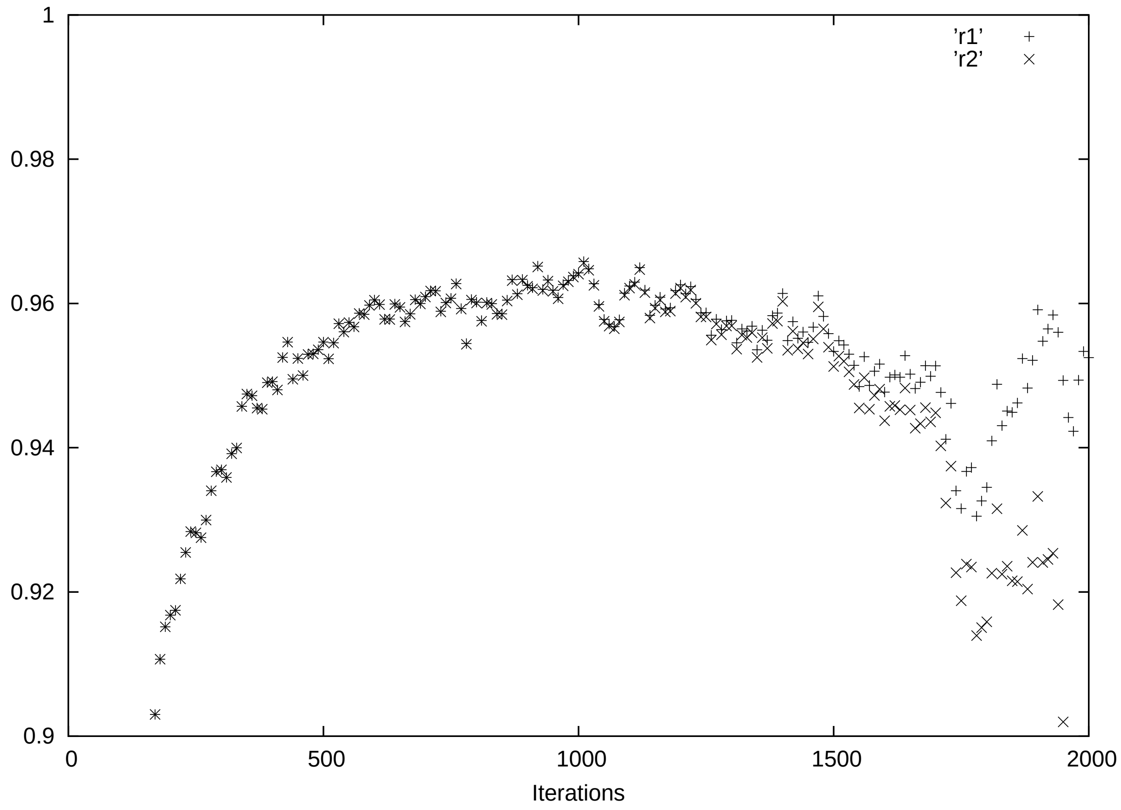

Рис. 4: 2000-мерный симплекс с 1999 вершинами. Сходимость по норме. Параметр линейной скорости сходимости.

Проекция на внешне заданные полиэдры

Полиэдр C во внешнем представлении

$$C = \{x : Ax \leq b\} \tag{3}$$

A — $m \times n$ матрица, b — m-вектор.

Задача проекции:

$$\min_{x \in C} \|x\|^2 = \|x^\star\|^2 \tag{4}$$

Минитеория

Лемма 1 *Существует* $\Gamma > 0$ *такое, что при всех* $\gamma \geq \Gamma$ *задачи (4) и*

$$\min\{\frac{1}{2}\|x\|^2 + \gamma|Ax - b|_\infty^+\} \tag{5}$$

где $|Ax - b|_\infty^+ = \max\{0, \max_{i=1,2,\ldots,n}(Ax - b)_i\}$. *а* $(Ax - b)_i$ — *i-ая координата вектора* $Ax - b$ *эквивалентны.*

Пусть $\bar{x} = (x, -1)$ и матрицу $\bar{A} = \|A|b\|$. Тогда (3) эквивалентно $\bar{x} \in \bar{X} = \{\bar{A}\bar{x} \leq 0\}$ и $|Ax - b|_\infty^+ = \max_{\lambda \in \Delta_m^0} \lambda\bar{A}\bar{x}$

Минитеория

Задача (5) превращается в

$$
\begin{gathered}
\min_{\bar{x}_{n+1}+1=0}\{\frac{1}{2}(\|\bar{x}\|^2-1)+\gamma\max_{\lambda\in\Delta^0_{n+1}}\lambda\bar{A}\bar{x}\}=\\
\min_{\bar{x}_{n+1}+1=0}\{\frac{1}{2}\|\bar{x}\|^2+(D)_{\bar{x}}\}-\frac{1}{2},
\end{gathered}
\tag{6}
$$

где

$$
D=\operatorname{co}\{0,\gamma\bar{A}_i, i=1,2,\dots,m\}.
$$

а $(D)_{\bar{x}}=\sup\limits_{d\in D} d\bar{x}$ — опорная функция множества D.

Минитеория

После лагранжевой релаксации ограничения $x_{n+1} + 1 = 0$ получаем

$$\begin{gathered} \min_x \max_u \{\tfrac{1}{2}\|\bar{x}\|^2 + (D)_{\bar{x}}\} + u(\bar{x}e^{n+1} + 1)\} = \\ \max_u \{u + \min_{\bar{x}} \{\tfrac{1}{2}\|\bar{x}\|^2 + (D + ue^{n+1})_{\bar{x}}\}\}, \end{gathered} \tag{7}$$

где $e^{n+1} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, а суммирование $D + ue^{n+1}$ означает множество $\{d + ue^{n+1}, d \in D\}$.

Обозначим

$$\phi(u) = \min_{\bar{x}} \{\frac{1}{2}\|\bar{x}\|^2 + (D(u))_{\bar{x}}\}$$

Минитеория

Из малоизвестного выпуклого анализа:

$$-\min_{\bar{x}} \{\frac{1}{2}\|\bar{x}\|^2 + (C)_{\bar{x}}\} = \min_{\bar{x}\in C} \frac{1}{2}\|\bar{x}\|^2$$

Отсюда

$$\phi(u) = \min_{\bar{x}\in D(u)} \frac{1}{2}\|\bar{x}\|^2$$

и, следовательно, достаточно хорошо вычислима.

Более того, $\phi(u)$ — кусочно-квадратичная гладкая и

$$\phi'(u) = \bar{x}_n + 1,$$

где $\bar{x}$ — проекция нуля на $D(u)$.

Вычислительные эксперименты

Страница в стадии разработки ...

Проблемы:

1. Вычислительная неустойчивость при больших Γ
2. Вычислительные ошибки при малых расстояниях от множества.
3. ...