Фейеровские процессы с малым возмущением и задачи потокового равновесия в сетях

Е.А. Нурминский, Н.Б. Шамрай
nurmi@dvo.ru, shamray@dvo.ru

ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток

IV Азиатская международная школа-семинар "Проблемы оптимизации сложных систем"
Новосибирск 2008

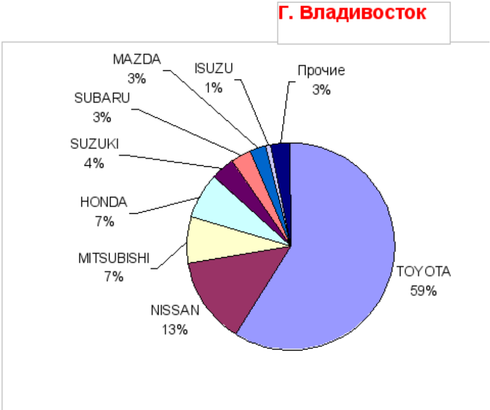
Сети — это сложные системы

Особенности сетей:

- широко распространенная модель (транспорт, связь, финансы и пр.);
- протяженный и топологически сложный характер;
- разнообразное использование многими агентами

Содержание

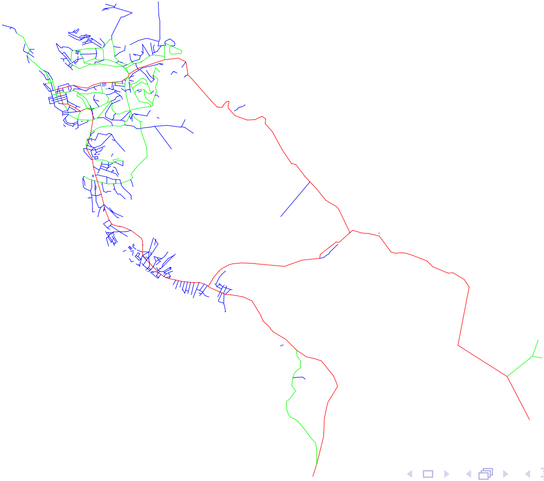
Автопарк г. Владивостока



Общее количество автомобилей — ок. 180 тыс. (2007 г), из них ок. 155 тыс — легковые автомобили в личном пользовании.

Советская градостроительная норма	60 авт/тыс
Владивосток	ок. 300 авт/тыс
Российские миллионники	300-350 авт/тыс
Европейская норма	400 авт/тыс

УДС г. Владивостока



Параметры УДС г. Владивостока

Таблица: Параметры УДС Владивостока

Листьев (терминальных вершин)	1274
Вершин степени 2	241
Вершин степени 3	2521
Вершин степени 4	245
Вершин степени 5	9
Всего вершин	4290
Всего вершин без транзитных	4049
Всего дуг	5172
Протяженность дорог (км)	1143.37
Среднее расстояние между перекрестками (м)	412.026
Средняя длина дуги (м)	221.069

Математическая формализация

Принцип бесколоалиционного равновесия [1]

Потоки по сети имеют такие значения, что никакой отдельный водитель не может изменить свой маршрут, не увеличив своих затрат.

Математическая формулировка:

Пусть P_w *— множество маршрутов, соединяющих пару* $w = (s, d)$ *источник-сток и* $G_p(x), p \in P_w$ *— удельные затраты для этих маршрутов, зависящие от вектора потоков* x.
Тогда $x_p > 0$ *влечет* $G_p(x) = u_w = \min_{q \in P_w} G_q(x)$.

[1] Wardrope J.G. *Some theoretical aspects of road traffic research*, Proc. of the Inst. of Civil. Eng, Part II, 1952, 1, pp. 325-378.

Математическая формализация

Задача нелинейной комплементарности:

$$\begin{gathered} x_p \geq 0, \Gamma_p(x,u) = G_p(x) - u_w \geq 0, \\ x_p \Gamma_p(x,u) = 0; \\ p \in P_w, w \in W, x \in X. \end{gathered} \tag{1}$$

Допустимое множество $X = \{x : \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, w \in W\}$.

Если — решение ЗНК, то

$$x_p \Gamma_p(x^\bullet_p, u) - x^\bullet_p \Gamma_p(x^\bullet_p, u) = G_p(x^\bullet)(x_p - x^\bullet_p) - u_w(x_p - x^\bullet_p) \geq 0.$$

Суммируя по p, получим

$$\sum_{p \in P_w} G_p(x^\bullet)(x_p - x^\bullet_p) - u_w \sum_{p \in P_w} (x_p - x^\bullet_p) = \sum_{p \in P_w} G_p(x^\bullet)(x_p - x^\bullet_p) \geq 0.$$

Математическая формализация

Вариационные неравенства:

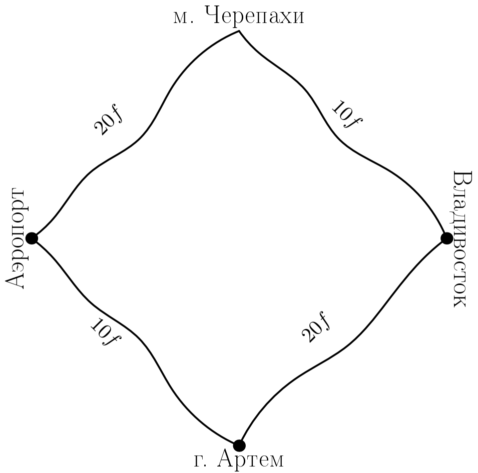
Найти $x^\bullet \in X$ *такие, что*

$$G(x^\bullet)(x - x^\bullet) \geq 0 \quad \textit{для любого } x \in X, \qquad (2)$$

где допустимое множество

$$X = \{x : \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, w \in W, x_p \geq 0\}.$$

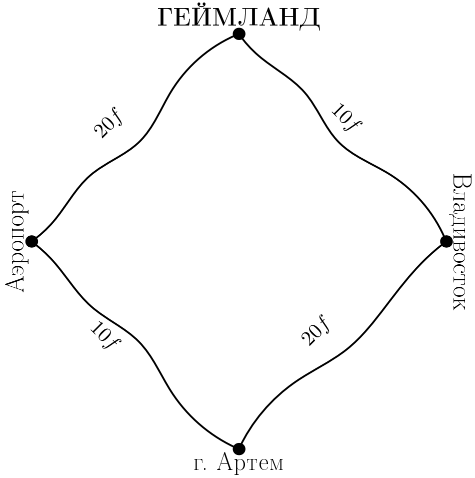
Транспортный парадокс



Начальное состояние:

- Общая потребность в перевозках Аэропорт-Владивосток — 6.
- Затраты на проезд — 90.

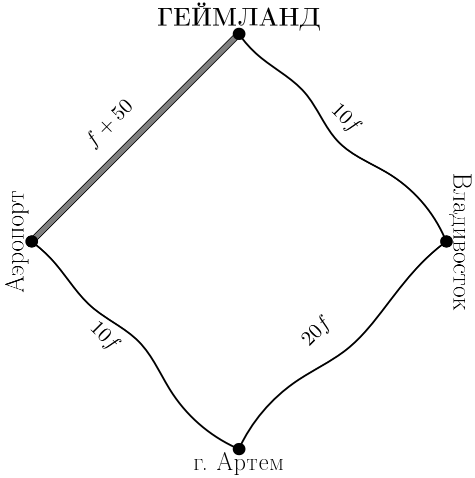
Транспортный парадокс



Начальное состояние с Игорной Зоной:

- Затраты на проезд — 90.

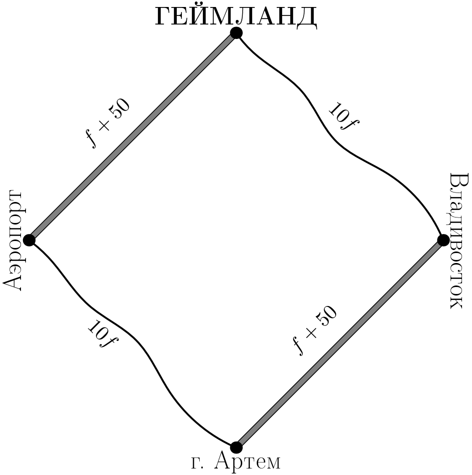
Транспортный парадокс



Построено шоссе 1:

- Затраты на проезд — 84.88;
- Верхний маршрут — 3.17;
- Нижний маршрут — 2.83.

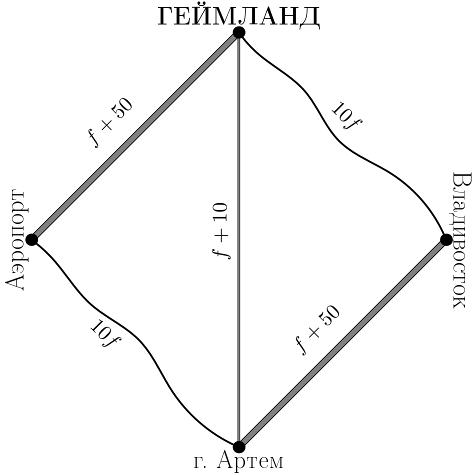
Транспортный парадокс



Построено шоссе 2:

- Затраты на проезд — 83 у.е.

Транспортный парадокс

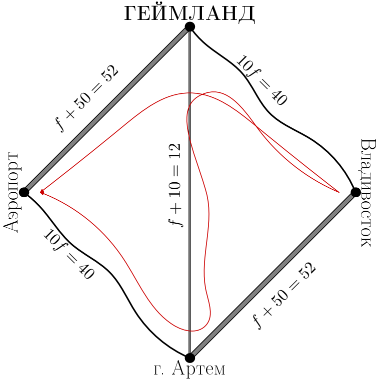


Построено шоссе 3:

- Затраты на проезд — 92 у.е. !!!
- Верхний маршрут — 2;
- Нижний маршрут — 2;
- Нижне-верхний маршрут — 2.

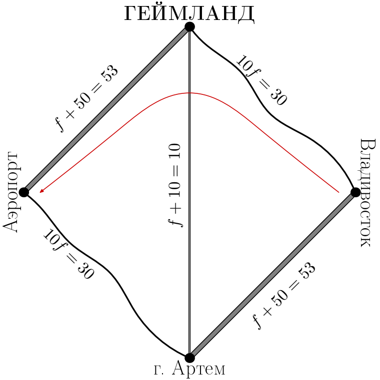
Затраты ВСЕХ водителей выше, чем первоначальные, до строительства

Равновесие и системный оптимум



Система – 552.0

Пользователь – 92.0



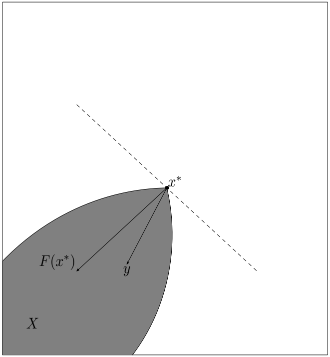
Система – 498.0

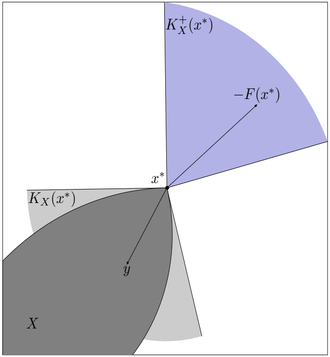
Пользователь – 83.0

Геометрия вариацианных неравенств

Пусть $x^\bullet \in X$ и $K_X^+(x^\bullet)$ — конус, сопряженный конусу допустимых направлений множества X в точке $x^\bullet$. Тогда

$$G(x^\bullet)(y - x^\bullet) \geq 0 \quad \text{для} \quad \forall y \in X \Leftrightarrow -G(x^\bullet) \in K_X^+(x^\bullet)$$





Проективные уравнения

Проективные уравнения:

$$x = \Pi_X(x - \lambda G(x)), \quad \lambda > 0$$

Методы на основе ПУ:

Простая итерация:

$$x^{k+1} = \Pi_X(x^k - \lambda G(x^k)), \quad \lambda \in (0, \tau),$$

$G(x)$ сильно монотонно;

Экстраградиентный метод:

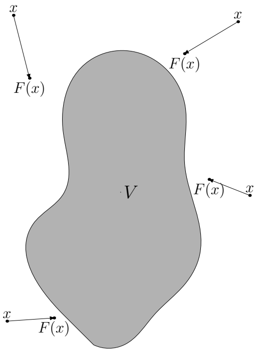
$$y^{k+1} = \Pi_X(x^k - \lambda G(x^k)), \quad x^{k+1} = \Pi_X(x^k - \lambda G(y^{k+1}))$$

$G(x)$ — монотонно.

Фейеровские операторы

Определение. *Оператор F будем называть фейеровским, если для любого x $\|F(x) - v\| \leq \|x - v\|$ для всех $v \in V, x \in \bar{x} + U$.*

Определение. *Фейеровский оператор F будем называть локально сильно фейеровским, если для любого $\bar{x} \notin V$ существует окрестность нуля U и число $\alpha \in [0, 1)$ такие, что $\|F(x) - v\| \leq \alpha\|x - v\|$ для всех $v \in V, x \in \bar{x} + U$.*



Фейеровские процессы

Фейеровский процесс:

$$x^{k+1} = F(x^k), k = 0, 1, \dots \qquad (3)$$

где F принадлежит одному из подклассов фейеровских операторов относительно заданного множества V,

Теорема. *Пусть V — замкнуто и ограничено, F — локально сильно фейеровский, последовательность $\{x^k\}$, полученная с помощью рекуррентных соотношений (6) с произвольным x^0, ограничена. Тогда все предельные точки $\{x^k\}$ принадлежат множеству V.*

Фейеровские процессы с малыми возмущениями

Фейеровский процесс с малыми возмущениями:

$$x^{k+1} = F(x^k + z^k), k = 0, 1, \dots \tag{4}$$

где F принадлежит одному из подклассов фейеровских операторов относительно заданного множества V,

Теорема. *Пусть V — замкнуто и ограничено, F — локально сильно фейеровский, последовательность $\{x^k\}$, полученная с помощью рекуррентных соотношений (6) с произвольным x^0, ограничена, $z^k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда все предельные точки $\{x^k\}$ принадлежат множеству V.*

Семейства фейеровских операторов с малыми возмущениями

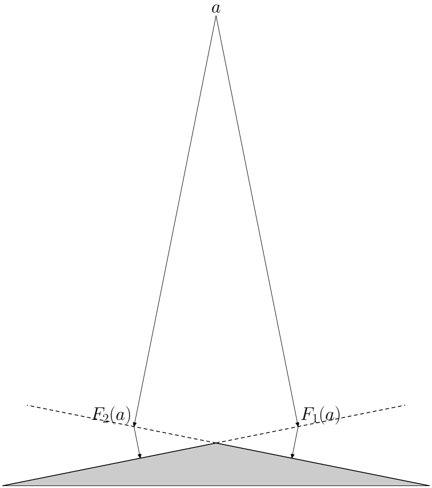
Теорема. *Пусть* $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ *— семейство операторов* P_i *таких, что для любой* $x \notin V$ *существует* P_i*, локально сильно фейеровский в* x*,* $z^k \to 0$ *при* $k \to \infty$ *и* $F_k = P_{i_k}$*, где* P_{i_k} *— локально сильно фейеровский в* x^k *оператор. Тогда, если последовательность* $\{x^k\}$*, построенная по правилу*

$$x^{k+1} = F_k(x^k + z^k), \quad s = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

ограничена, то все ее предельные точки принадлежат V*.*

Резюме: Малые возмущения не препятствуют сходимости (сильно) фейеровских процессов.

Приложения семейств фейеровских операторов

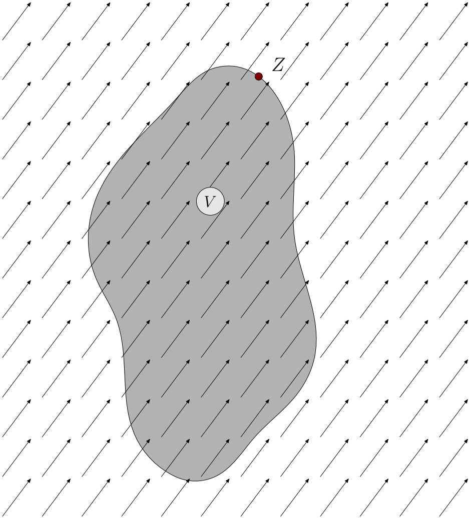


$V = \cap_{i=1}^{N} V_i$

Аттрактанты

Определение. *Точечно-множественное отображение* $\Phi : V \to E$ *называется локально сильным аттрактантом множества* $Z \subset V$*, если для любого* $x' \in V \setminus Z$ *существует окрестность нуля* U *такая, что* $g(z - x) \geq \delta > 0$ *для всех* $z \in Z, x \in x' + U, g \in \Phi(x)$ *и некоторого* $\delta > 0$*.*

Векторное поле аттрактанта



F-процессы с аттрактантами

Стационарный:

$$x^{k+1} = F(x^k + \lambda_k \Phi(x^k)). \tag{6}$$

Нестационарный:

$$x^{k+1} = F_k(x^k + \lambda_k \Phi(x^k)). \tag{7}$$

Результат теории малых возмущений: как (9) так и (10) сходятся к V при $\lambda_k \to 0$ когда $k \to \infty$.

Сходимость

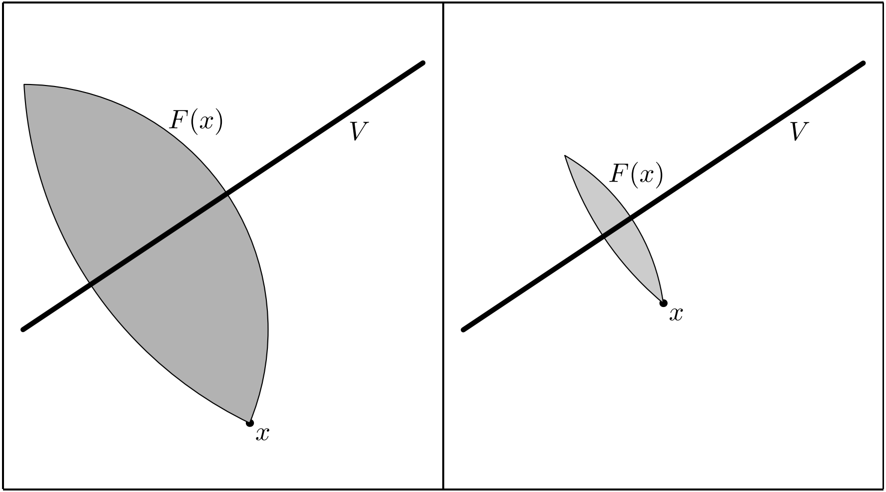
Теорема. *Пусть F — локально сильно фейеровский оператор, Φ — локально сильный аттрактант $Z \subset V$, полунепрерывный сверху на некотором открытом $\tilde{V} \supset V$ и последовательность $\{x^k\}$, построена по правилу*

$$x^{k+1} = F(x^k + \lambda_k \Phi(x^k)), \tag{8}$$

где начальное состояние x^0 произвольно, $\lambda_k \to +0, \sum \lambda_k = \infty$. Тогда, если $\{x^k\}$ ограничена, то любая предельная точка $\{x^k\}$ принадлежит Z.

Резюме: С помощью аттрактантов можно направить фейеровские процессы в нужную часть притягивающего множества.

Фейеровские операторы



Точка x "далеко" от V . Точка x "близко" к V .

Последовательное проектирование

Пусть

$$V = \cap_{\tau \in T} V_\tau,$$

$V_\tau, \tau \in T$ — выпуклые замкнутые подмножества E.

Теорема. *Пусть V - замкнутое ограниченное множество, представимое в виде пересечения конечного или бесконечного семейства выпуклых множеств: $V = \cap_{\tau \in T} V_\tau$ и обозначим через $\Pi_\tau(x) = x_\tau$ проекцию точки x на V_τ. Тогда, если $x \notin V_{\tau'}$, для некоторого $\tau' \in T$, то оператор $F = \Pi_{\tau'}$ является локально сильно фейеровским в точке x.*

Метод последовательного проектирования

Задача

$$\min_{x \in V} f(x), V = \cap_{i=1}^{N} V_i.$$

Метод последовательных проекций градиента:

$$x^{k+1} = F_k(x^k - \lambda_k g^k), \; g^k \in \partial f(x^k)$$

где $F_k(x) = \Pi_{i_k}(x)$, а i_k такого, что $x^k \notin V_{i_k}$.

Параллельное проектирование

Пусть

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} w_i \Pi_i(x), \tag{9}$$

где Π_i — проекция на множества V_i,
$w = (w_1, w_2, \ldots, w_N) \in \Delta_N = \{w : w_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} w_i = 1\}$.

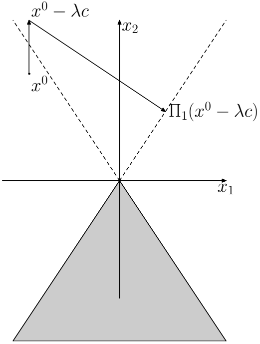
Теорема. *Пусть для оператора F, заданного соотношением (12) имеет место $\sum_{i: x \notin V_i} w_i \geq \gamma > 0$. Тогда $F(x)$ в точке x является локально сильно фейеровским.*

Очень тестовый пример

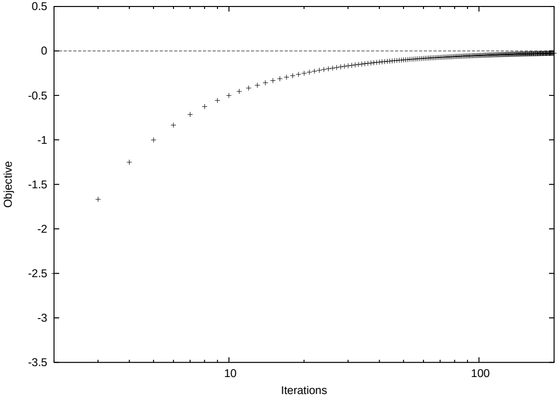
$$\begin{array}{ccc} \min x_2 & = & \min cx \\ 2x_1 + x_2 \leq 0 & & 2x_1 + x_2 \leq 0 \\ -2x_1 + x_2 \leq 0 & & -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ & & c = (0,1) \end{array}$$

Алгоритм:

$$x^{k+1} = \Pi_k(x^k - \lambda_k c), k = 1, 2, \dots .$$

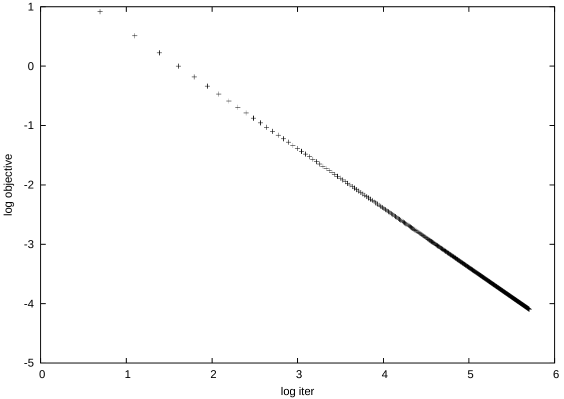


Тестовый пример. Оптимизация



Сходимость по целевой функции.

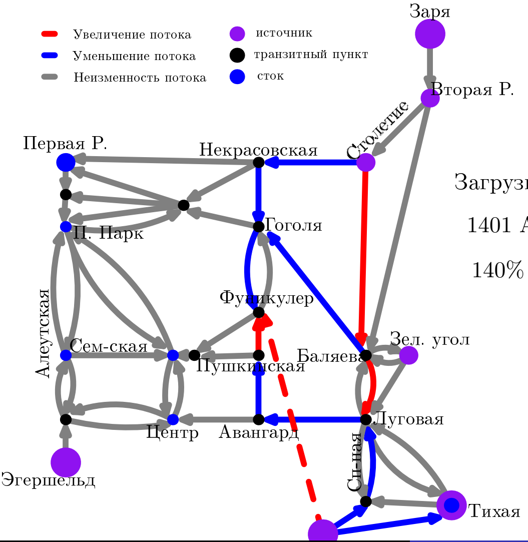
Тестовый пример. Характер сходимости



Сходимость по целевой функции.

$$\Delta f_n \approx n^{-k}, n = 1, 2, \ldots; \;\; k = 1.0$$

УДС Владивостока. Мост через б. Золотой Рог

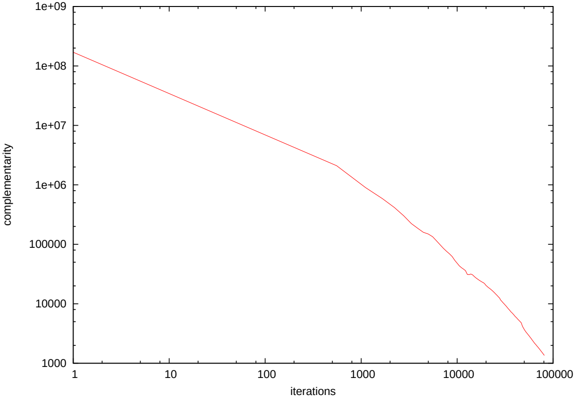


Загрузка моста:

1401 АТС в час на полосу

140% от максимальной загрузки полосы

УДС Владивостока. Условие комплементарности



72 пары источник-сток, 10 маршрутов на пару.

Транспортные сети

Транспортные сети

- Стенбринк П.А. Оптимизация транспортных сетей .- М.:Транспорт, 1961
- Васильева Е. М., Левит Б. Ю., Лившиц В. Н. Нелинейные транспортные задачи на сетях. М.: Финансы и статистика, 1981.
- Швецов В. И. Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. - 2003. - №11. - с. 3-46.

Фейеровские процессы, вариационные неравенства

- Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. — Екатеринбург: УрО РАН, 2005 .— 210 с.
- Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. — М.: Наука, 1989. — 400 с.
- Facchinei F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Volume I. — Springer, 2003. — 704 p.
- Nagurney A. Network Economics: A Variational Inequality Approach. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 450 p.

Проекция, CFP

- Bauschke H. H., Borwein J. M. On projection algorithms for solving convex feasibility problems// SIAM Revs. 1996. V. 38 №3, P. 367-426.
- Е.А. Нурминский Проекция на полиэдры во внешнем представлении// Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 2008 .- т. 48, №3.

Фейеровские процессы с малыми возмущениями

- Нурминский Е.А. *Фейеровские процессы с малым возмущением//* Доклады АН, в печати.
- Е.А. Нурминский *Декомпозиция и параллелизация вычислительных процессов на основе фейеровских процессов с малым возмущением//* Журн. вычисл. матем. и матем. физики, в печати.

Электронные копии доступны по адресу `http://elis.dvo.ru/~nurmi`.