

УДК 519.677

**ПРОЕКЦИЯ НА ВНЕШНЕ ЗАДАННЫЕ ПОЛИЭДРЫ<sup>1)</sup>**© 2008 г. **Е. А. Нурминский**

(690041 Владивосток, ул. Радио, 5, Ин-т автоматики и процессов управления ДВО РАН)

E-mail: nurmi@dvo.ru

Поступила в редакцию 11.04.2007 г.  
Переработанный вариант 01.20.2007 г.

Задача проекции начала координат на полиэдр  $n$ -мерного пространства, заданный системой  $m$  неравенств, сведена к последовательности задач проектирования на однопараметрическое семейство сдвигов многогранника с не более чем  $m + 1$  вершинами размерности  $n + 1$ . Указанную задачу предлагается преобразовать в проекцию на выпуклый полиэдральный конус с  $m$  образующими, что позволяет существенно упростить решение эквивалентной задачи и свести ее к единственной операции проектирования. Приведены результаты вычислительных экспериментов со случайными многогранниками высокой размерности. Библ. 8. Табл. 1. Фиг. 1.

Ключевые слова: ортогональная проекция, линейная система неравенств, вектор минимальной нормы.

Рассматривается непустое выпуклое полиэдральное подмножество  $X = \{x: Ax \leq b\}$   $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$ , заданное системой  $m$  неравенств, определяемых  $(m \times n)$ -матрицей  $A$  и  $m$ -вектором  $b$  и задача

$$\min_{x \in X} \frac{1}{2} \|x\|^2 = \frac{1}{2} \|x^*\|^2 \quad (1)$$

отыскания в этом множестве точки  $x^*$  с минимальной нормой. Чтобы избежать тривиальности будем предполагать, что  $0 \notin X$ . Проблема (1) возникает в задачах распознавания образов, обработки данных, используется в различных вычислительных процедурах.

В данной работе предложен алгоритм ее решения, основанный на сведениях к рассмотренной ранее (см. [1], [2]) процедуре проекции на полиэдр во внутреннем представлении, т.е. заданном как выпуклая оболочка своих крайних точек. Для последней процедуры в [2] получена глобальная “лучшая чем линейная” оценка скорости сходимости и вычислительные эксперименты показали ее вполне удовлетворительную практическую эффективность на задачах достаточно большой размерности.

В принципе исходный многогранник  $X$  может с самого начала быть представлен как выпуклая оболочка своих крайних точек, однако непосредственное применение алгоритма [2] к подобной форме представления многогранника нецелесообразно по целому ряду соображений. В первую очередь это связано с тем, что количество крайних точек этого многогранника экспоненциально велико по количеству ограничений  $m$  и полиномиально со степенью порядка  $m$  по количеству переменных  $n$ . Во-вторых, крайние точки  $X$  заданы неявным образом и их отбор для работы алгоритма [2] требует решения вспомогательной задачи линейного программирования. Несмотря на успехи полиномиальных алгоритмов линейного программирования эта задача остается достаточно трудоемкой к тому же эти алгоритмы плохо приспособлены для решения серий модифицируемых задач, что существенно в данном случае. Классический симплекс-метод имеет экспоненциальную оценку трудоемкости и не исключает возможности закливания.

Указанные обстоятельства мотивировали исследование альтернативных подходов, в результате чего удалось свести задачу (1) к серии проекций на однопараметрические сдвиги двойственного многогранника с  $(m + 1)$ -вершинами в  $n$ -мерном пространстве. Дальнейший анализ показал, однако, что указанную проекцию достаточно получить лишь для одного сдвига многогранного выпуклого конуса с  $m$  образующими.

<sup>1)</sup>Работа поддержана грантом ДВО РАН 06-III-A-01-459.

## 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Все встречающиеся в работе векторы будем считать принадлежащими конечномерным евклидовым пространствам соответствующей размерности. Для набора векторов  $D = \{a^1, \dots, a^m\}$  через  $\text{aff}\{D\}$  будем обозначать его аффинную оболочку:

$$\text{aff}\{D\} = \left\{ x = \sum_{i=1}^m \mu_i a^i, \sum_{i=1}^m \mu_i = 1 \right\},$$

через  $\text{Co}\{D\}$  – коническую

$$\text{Co}\{D\} = \left\{ x = \sum_{i=1}^m \mu_i a^i, \mu_i \geq 0 \right\},$$

через  $\text{co}\{D\}$  – выпуклую

$$\text{co}\{D\} = \left\{ x = \sum_{i=1}^m \mu_i a^i, \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \mu_i = 1 \right\}.$$

Скалярное произведение двух векторов  $x, y$  будем обозначать  $xy$ . Отличие от случая, когда вектор умножается на скаляр, обычно ясно из контекста.

Пусть  $e$  – вектор из единиц подходящий для случая размерности. Через  $\Delta_m$  обозначим  $m$ -мерный стандартный симплекс:

$$\Delta_m = \left\{ s = (s_1, \dots, s_m) : \sum_{i=1}^m s_i = se = 1, s_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \right\}.$$

Покажем, что задача (1) может быть эквивалентным образом преобразована в задачу безусловной оптимизации с негладким точным штрафом.

**Лемма 1.** *Существует  $\Gamma > 0$  такое, что при всех  $\gamma \geq \Gamma$  задачи (1) и*

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|x\|^2 + \gamma |Ax - b|_\infty^+ \right\}, \quad (2)$$

где  $|Ax - b|_\infty^+ = \max\{0, \max_{i=1,2,\dots,n} (Ax - b)_i\}$ ,  $a(Ax - b)_i$  есть  $i$ -я координата вектора  $Ax - b$ , эквивалентны.

**Доказательство.** Условия оптимальности для задачи (1) имеют вид

$$x^* + u^*A = 0, \quad (3)$$

где  $u^* \geq 0$  – оптимальные двойственные переменные. Для нетривиального случая  $u^*e = \Gamma > 0$ . Перепишем (3) в виде

$$x^* + \Gamma \mu^*A = 0 \quad (4)$$

с  $\mu^* = u^*/(u^*e) \in \Delta_m$  и положим  $\psi(x) = |Ax - b|_\infty^+$ . Учитывая допустимость  $x^*$  имеем  $\psi(x^*) = 0$ .

В силу условий дополняющей нежесткости  $\mu^*(Ax^* - b) = 0$  и, следовательно, для произвольного  $x$  имеем

$$\psi(x) - \psi(x^*) = |Ax - b|_\infty^+ = \max\{0, \max_{i=1,2,\dots,n} (Ax - b)_i\} \geq \mu^*(Ax - b) - \mu^*(Ax^* - b) = \mu^*A(x - x^*)$$

откуда следует, что  $\mu^*A \in \partial\psi(x^*)$ . Следовательно, условие (4) можно переписать в виде

$$0 \in \partial \left\{ \frac{1}{2} \|x^*\|^2 + \Gamma \psi(x^*) \right\}$$

и, соответственно,  $x^*$  минимизирует нагруженную целевую функцию задачи (2). В силу единственности решений задач (1) и (2) справедливо и обратное.

Далее для  $\gamma > \Gamma$  следует

$$\frac{1}{2}\|x^*\|^2 + \gamma\psi(x^*) = \frac{1}{2}\|x^*\|^2 + \Gamma\psi(x^*) \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \Gamma\psi(x) \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \gamma\psi(x),$$

что доказывает оптимальность  $x^*$  для всех  $\gamma > \Gamma$  и завершает доказательство.

Для дальнейших построений дополним вектор  $x$  еще одной координатой, т.е. обозначим  $\bar{x} = (x, x_{n+1})$  и введем расширенную матрицу  $\bar{A} = \|A|b\|$ . Тогда  $x \in X$  эквивалентно  $\bar{x} \in \bar{X} = \{\bar{x} : \bar{A}\bar{x} \leq 0, x_{n+1} = \bar{x}e^{n+1} = -1\}$ , где  $e^{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1) - (n+1)$ -й координатный орт. Более того,

$$|Ax - b|_{\infty}^+ = |\bar{A}\bar{x}|_{\infty}^+ = \max\{0, \max_{\lambda \in \Delta_m} \lambda \bar{A}\bar{x}\} = \max_{\lambda \in \Delta_m^0} \lambda \bar{A}\bar{x}, \tag{5}$$

где  $\Delta_m^0 = \{\lambda : \sum_{i=1}^m \lambda_i \leq 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $u \in R$  – скалярная переменная,  $\bar{A}^i, i = 1, 2, \dots, m$  – вектор-строки матрицы  $\bar{A}, \gamma > \Gamma$  и

$$D_{\gamma}(u) = \text{co}\{0, \gamma \bar{a}^i, i = 1, 2, \dots, m\} + ue^{n+1} = D_{\gamma} + ue^{n+1}.$$

Тогда

$$\min_{x \in X} \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}\|x^*\|^2 = -\min_u \{\phi_{\gamma}(u) - u\}, \tag{6}$$

где

$$\phi_{\gamma}(u) = \min_{\bar{x} \in D_{\gamma}(u)} \frac{1}{2}\|\bar{x}\|^2.$$

**Доказательство.** В силу леммы 1 и (5), задача (2) превращается в задачу

$$\begin{aligned} \min \left\{ \frac{1}{2}\|x\|^2 + \gamma|Ax - b|_{\infty}^+ \right\} &= \min_{\bar{x}_{n+1} + 1 = 0} \left\{ \frac{1}{2}(\|\bar{x}\|^2 - 1) + \gamma \max_{\lambda \in \Delta_{n+1}^0} \lambda \bar{A}\bar{x} \right\} = \\ &= \min_{\bar{x}_{n+1} + 1 = 0} \left\{ \frac{1}{2}\|\bar{x}\|^2 + (\gamma D)_{\bar{x}} \right\} - \frac{1}{2} = \min_{\bar{x}_{n+1} + 1 = 0} \left\{ \frac{1}{2}\|\bar{x}\|^2 + \gamma(D)_{\bar{x}} \right\} - \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{7}$$

где  $D = \{d : d = \lambda \bar{A}, \lambda \in \Delta_m^0\}$ , а  $(D)_{\bar{x}} = \sup_{d \in D_{\gamma}} d\bar{x}$  – опорная функция множества  $D$ . Легко видеть, что множество  $D$  может быть представлено своими крайними точками, которые соответствуют строкам  $\bar{A}_i, i = 1, 2, \dots, m$ , матрицы  $\bar{A}$ , дополненным нулевым вектором:

$$D = \text{co}\{0, \bar{A}_i, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Заметим, что количество крайних точек множества  $D$  всего лишь на единицу больше количества ограничений.

Последняя задача в цепочке (7) может быть преобразована путем лагранжевой релаксации единственного ограничения в

$$\begin{aligned} \min_x \max_u \left\{ \frac{1}{2}\|\bar{x}\|^2 + (D_{\gamma})_{\bar{x}} \right\} + u(\bar{x}e^{n+1} + 1) \Big\} &= \\ = \max_u \left\{ u + \min_{\bar{x}} \left\{ \frac{1}{2}\|\bar{x}\|^2 + (D_{\gamma} + ue^{n+1})_{\bar{x}} \right\} \right\}, \end{aligned} \tag{8}$$

где  $e^{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)$ , а суммирование  $\gamma D + ue^{n+1}$  означает множество  $\{\gamma d + ue^{n+1}, d \in D\}$ , т.е. сдвиг  $\gamma D$  в направлении  $e^{n+1}$  на величину  $u$ .

В [3] (см. также [4, разд. 3.2], хотя там это не указано в явном виде) было отмечено, что для произвольного выпуклого замкнутого множества  $C$  имеем

$$-\min_{\bar{x}} \left\{ \frac{1}{2} \|\bar{x}\|^2 + (C)_{\bar{x}} \right\} = \min_{\bar{x} \in C} \frac{1}{2} \|\bar{x}\|^2.$$

Вводя обозначение

$$\phi_{\gamma}(u) = \min_{\bar{x} \in D_{\gamma}(u)} \frac{1}{2} \|\bar{x}\|^2, \quad (9)$$

где

$$D_{\gamma}(u) = \gamma D + ue^{n+1} = \text{co}\{ue^{n+1}, \gamma \bar{A}_i + ue^{n+1}, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

и применяя это соотношение к (8), получаем окончательно эквивалентность

$$\min_{x \in X} \frac{1}{2} \|x\|^2 = -\min_u \{\phi_{\gamma}(u) - u\}.$$

Практическая польза от соотношения (6) зависит от того, каковы свойства функции  $\phi_{\gamma}$  и насколько эффективно она вычислима.

## 2. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ МИНИМАЛЬНОГО РАССТОЯНИЯ

Исследуем свойства функции  $\phi_{\gamma}(u)$ , которую будем называть функцией минимального расстояния, и предложим некоторый конечный алгоритм решения задачи

$$\min_u \{\phi_{\gamma}(u) - u\} = \phi_{\gamma}(u^*) - u^*. \quad (10)$$

**Лемма 2.** *Функция  $\phi_{\gamma}$  – выпуклая, гладкая и кусочно-квадратичная.*

**Доказательство.** Пусть  $\lambda \in [0, 1]$  и  $v_{\lambda} = \lambda v' + (1 - \lambda)v''$ . Учтывая то, что для  $\lambda \in [0, 1]$  и произвольного выпуклого замкнутого множества  $B$  выполняется соотношение  $\lambda B + (1 - \lambda)B = B$ , получаем

$$\begin{aligned} \phi_{\gamma}(v_{\lambda}) &= \min_{z \in D(v_{\lambda})} \frac{1}{2} \|z\|^2 = \min_{z \in \lambda(D + v'e^{n+1}) + (1-\lambda)(D + v''e^{n+1})} \frac{1}{2} \|z\|^2 = \\ &= \min_{\substack{z' \in D + v'e^{n+1} \\ z'' \in D + v''e^{n+1}}} \frac{1}{2} \|\lambda z' + (1 - \lambda)z''\|^2 \leq \min_{\substack{z' \in D + v'e^{n+1} \\ z'' \in D + v''e^{n+1}}} \frac{1}{2} \{\lambda \|z'\|^2 + (1 - \lambda)\|z''\|^2\} = \\ &= \lambda \min_{z' \in D + v'e^{n+1}} \frac{1}{2} \|z'\|^2 + (1 - \lambda) \min_{z'' \in D + v''e^{n+1}} \frac{1}{2} \|z''\|^2 = \lambda \phi_{\gamma}(v') + (1 - \lambda) \phi_{\gamma}(v''), \end{aligned}$$

что доказывает выпуклость  $\phi_{\gamma}$ . Гладкость  $\phi_{\gamma}(\cdot)$  следует из единственности решения задачи (9), а кусочно-квадратичность – из кусочно-линейной зависимости ее решения от  $u$ .

Для производной  $\phi'_{\gamma}(u)$  получаем  $\phi'_{\gamma}(u) = \bar{x}^*(u)e^{n+1} = \bar{x}_{n+1}^*(u)$ , где  $\bar{x}^*(u)$  – решение задачи (9), а  $\bar{x}_{n+1}^*(u)$  есть  $(n + 1)$ -я координата этого вектора.

Как видно, вычисление  $\phi'_{\gamma}(u)$  не требует фактически никаких дополнительных операций по сравнению с вычислением значения  $\phi_{\gamma}(u)$ . В этих условиях легко организовать процесс типа дихотомии, сужающий интервал неопределенности для решения задачи (10) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем 0.5, не зависящим от параметров задачи. Далее, в силу конечной кусочно-линейности  $\phi'_{\gamma}$ , также легко организовать точное вычисление  $u^*$  при достаточно малом интервале  $[u_l, u_r]$  таком, что  $u_l < u_r$ ,  $\phi'_{\gamma}(u_l) < 1$ ,  $\phi'_{\gamma}(u_r) > 1$  и имеющем не более двух

участков линейности для  $\phi_\gamma^1$ . При этом, несмотря на потенциально экспоненциальное число участков кусочно-квадратичности для  $\phi_\gamma$ , алгоритм решения задачи (10) в терминах числа итераций будет являться линейным по количеству ограничений и логарифмическим по количеству переменных. Полиномиальность же всей вычислительной процедуры зависит при этом от сложности вычисления  $\phi_\gamma(u)$ . Как показано в [6], задача квадратичного программирования с фиксированным числом ограничений имеет полиномиальную по длине ввода вычислимость, что конструктивно демонстрируется линейным по длине ввода применением метода эллипсоидов с трудоёмкостью  $O((n+m)^4L)$ , где  $L$  – длина бинарного ввода для целочисленных исходных данных,  $n$  – количество переменных,  $m$  – количество ограничений задачи.

С вычислительной точки зрения процедуру решения задачи (10) можно существенно упростить, перейдя от ограниченных множеств  $D_\gamma(u)$  к конусу  $\text{Co}\{D\}$ . При этом, как оказывается, несмотря на свой экстремальный способ задания, функция

$$\phi(u) = \min_{x \in \text{Co}(D) + ue^{n+1}} \|x\|^2, \tag{11}$$

являющаяся прямым аналогом  $\phi_\gamma(u)$  из (9), превращается в простейший квадратичный полином от  $u$ :  $\phi(u) = \alpha^2 u^2$ .

Действительно, пусть  $x^*(u) = z^*(u) + ue^{n+1}$  – решение задачи (11) с  $z^*(u) \in \text{Co}(D)$ . Тогда, в силу условий оптимальности, для любого  $z \in \text{Co}(D)$  имеем

$$(z + ue^{n+1})(z^*(u) + ue^{n+1}) \geq \|z^*(u) + ue^{n+1}\|^2.$$

Умножив это неравенство на  $\tau^2$ , где  $\tau = u'/u > 0$  с  $u' > 0$ , получим

$$\begin{aligned} (\tau z + \tau ue^{n+1})(\tau z^*(u) + \tau ue^{n+1}) &= (\tau z + u'e^{n+1})(\tau z^*(u) + u'e^{n+1}) \geq \\ &\geq \|\tau z^*(u) + \tau ue^{n+1}\|^2 = \|\tau z^*(u) + u'e^{n+1}\|^2, \end{aligned}$$

а так как  $\tau \text{Co}(D) = \text{Co}(D)$ , то

$$(z + u'e^{n+1})(\tau z^*(u) + u'e^{n+1}) \geq \|\tau z^*(u) + u'e^{n+1}\|^2$$

для любого  $z \in \text{Co}(D)$ . Следовательно, решением задачи (11) при замене  $u$  на  $u'$  будет  $x^*(u') = (u'/u)z^*(u) + u'e^{n+1}$ . Отсюда получаем  $x^*(u) = u(w^* + e^{n+1})$  для некоторого  $w^* \in \text{Co}D$ , независимого от  $u$  и, соответственно,  $\phi(u) = \|w^* + e^{n+1}\|^2 u^2 = \alpha^2 u^2$ , что и требовалось доказать. Заметим также, что  $\phi(u) \leq \phi_\gamma(u)$  для любых  $\gamma$  и  $u$ .

Для того чтобы показать правомерность перехода к коническим оболочкам, докажем несколько простых утверждений.

**Лемма 3.** Если  $\phi_\gamma(\bar{u}) > \phi(\bar{u})$  для некоторого  $\bar{u}$ , то  $\phi_\gamma(u) > \phi(u)$  для всех  $u > \bar{u}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\kappa > 1$  и  $u = \kappa \bar{u} > \bar{u}$ . Тогда  $\text{co}\{\kappa D_\gamma\} \supset \text{co}\{D_\gamma\}$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} \phi_\gamma(\bar{u}) &= \min_{d \in \text{co}\{D_\gamma\}} \frac{1}{2} \|d + \bar{u}e\|^2 = \frac{1}{\kappa^2} \min_{d \in \text{co}\{D_\gamma\}} \frac{1}{2} \|\kappa d + \kappa \bar{u}e\|^2 = \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \min_{d \in \text{co}\{\kappa D_\gamma\}} \frac{1}{2} \|d + ue\|^2 \leq \frac{1}{\kappa^2} \min_{d \in \text{co}\{D_\gamma\}} \frac{1}{2} \|d + ue\|^2 = \frac{1}{\kappa^2} \phi_\gamma(u), \end{aligned}$$

т.е.

$$\phi_\gamma(u) \geq \kappa^2 \phi_\gamma(\bar{u}) > \kappa^2 \phi(\bar{u}) = \phi(u),$$

что и требовалось доказать.

**Следствие 1.** Если  $\phi_\gamma(\bar{u}) = \phi(\bar{u})$  для некоторого  $\bar{u}$ , то  $\phi_\gamma(u) = \phi(u)$  для всех  $u \leq \bar{u}$ , откуда следует

**Лемма 4.** Для любого  $\bar{u}$  существует  $\Gamma$  такое, что  $\phi_\gamma(u) = \phi(u)$  для всех  $u \leq \bar{u}$  при  $\gamma > \Gamma$ .

**Доказательство.** Пусть  $z_{\bar{u}}^*$  – решение задачи (11) при  $u = \bar{u}$ , которое очевидным образом существует. Выберем  $\Gamma$  так, чтобы  $z_{\bar{u}}^* \in \Gamma \text{co}\{D\} = \text{co}\{D_\Gamma\} \subset \text{co}\{D_\gamma\}$  для всех  $\gamma > \Gamma$ . При этом, очевидно,  $\phi_\gamma(\bar{u}) = \phi(\bar{u})$  что, в силу следствия леммы 3, доказывает утверждение.

Приведенные леммы дают возможность получить окончательное выражение для решения задачи (1).

**Теорема 2.** *Имеет место утверждение*

$$\min_{x \in X_2} \frac{1}{2} \|x\|^2 = \frac{1}{2} \phi(1)(\phi(1) - 1). \quad (12)$$

**Доказательство.** Действительно,  $\phi(u)$  может быть записана как  $\phi(u) = \alpha^2 u^2 = \phi(1)u^2$ , откуда следует, что решение задачи

$$\phi_* = \min_u (\phi(u) - u) = \min_u (\phi(1)u^2 - u) \quad (13)$$

имеет вид  $u_* = \phi(1)/2$  и, следовательно,  $\phi_* = \phi(1)(\phi(1) - 1)/2$ . Положим  $\bar{u} = 2u_*$ . Взяв значение  $\Gamma$  максимальным из определяемых леммами 1 и 4, а затем положив  $\gamma > \Gamma$ , получим

$$\begin{aligned} \min_{x \in X_2} \frac{1}{2} \|x\|^2 &= \min_u (\phi_\gamma(u) - u) = \min \left\{ \min_{u \in [0, \bar{u}]} (\phi_\gamma(u) - u), \min_{u \geq \bar{u}} (\phi_\gamma(u) - u) \right\} = \\ &= \min \left\{ \min_{u \in [0, \bar{u}]} (\phi(u) - u), \min_{u \geq \bar{u}} (\phi_\gamma(u) - u) \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку для  $u > \bar{u}$  в любом случае имеем  $\phi_\gamma(u) \geq \phi(u)$ , то

$$\min_{u \geq \bar{u}} (\phi_\gamma(u) - u) \geq \min_{u \geq \bar{u}} (\phi(u) - u) > \min_{u \in [0, \bar{u}]} (\phi(u) - u),$$

и, следовательно,

$$\min_{x \in X_2} \frac{1}{2} \|x\|^2 = \min_{u \in [0, \bar{u}]} (\phi(u) - u) = \min_u (\phi(u) - u) = \phi_*,$$

что и требовалось доказать.

Переход к коническим оболочкам строк  $\bar{A}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , матрицы  $\bar{A}$  существенно прощает решение задачи (10), однако ставит вопрос о разработке эффективных алгоритмов решения задачи проекции  $\min_{x \in \text{Co}(D) + ue^{n+1}} \|x\|^2$  на сдвинутый конус  $\text{Co}(D)$ . Как вариант, для решения этой задачи можно применить модификацию алгоритма из [2], которую опишем ниже.

### 3. ПРОЕКТИРОВАНИЕ НА КОНУС, ЗАДАННЫЙ ОБРАЗУЮЩИМИ

Поскольку специфика вектора сдвига не играет никакой роли, мы рассмотрим следующую общую задачу:

$$\min_{z \in \text{Co}(D) + a} \|z\|^2 = \|z^*\|^2 = \min_{x \in \text{Co}(D)} \|x + a\|^2 = \|x^* + a\|^2, \quad (14)$$

где  $a$  – некий вектор сдвига,  $\text{Co}\{D\} = \text{Co}(a^1, a^2, \dots, a^m)$  – выпуклый конус, порожденный системой векторов  $D = \{a^1, a^2, \dots, a^m\}$ . Мы будем рассматривать также и конические оболочки подмножеств  $D$ , представляющие соответствующие подконусы  $\text{Co}\{D\}$ . В связи с этим потребуются определение подходящего подконуса, аналогичное определению подходящего подсимплекса в [2].

**Определение.** Конус  $\text{Co}\{D'\}$  с  $D' \subset D$  называется *подходящим*, если

$$\min_{z \in a + \text{aff}\{D'\}} \|z\|^2 = \min_{z \in a + \text{Co}\{D'\}} \|z\|^2. \quad (15)$$

Заметим, что любой одномерный конус  $\text{Co}\{a^i\}$  с  $aa^i \leq 0$  будет подходящим, поскольку задача  $\min_{\lambda} \|a + \lambda a^i\|^2$  имеет решение  $\lambda_* = -aa^i/\|a^i\|^2 \geq 0$  и, следовательно,

$$\min_{\lambda} \|a + \lambda a^i\|^2 = \min_{z \in a + \text{aff}\{a^i\}} \|z\|^2 = \min_{\lambda \geq 0} \|a + \lambda a^i\|^2 = \min_{z \in a + \text{Co}\{a^i\}} \|z\|^2.$$

Сам алгоритм с соответствующими модификациями выглядит следующим образом.

**Инициализация.** Положим  $k = 0$ ,  $z^k = a$ ,  $J_k = \{i_k\}$ ,  $D_k = \{a^i, i \in J_k\}$ , где индекс  $i_k$  такой, что

$$z^k a^{i_k} = \min_{i=1,2,\dots,m} z^k a^i = \alpha_k.$$

Если  $\alpha_k \geq 0$ , то точка  $z^{k+1} = a$  (или  $x^{k+1} = 0$ ) – решение задачи (14) и алгоритм прекращает свою работу. В противном случае выполняется основной цикл алгоритма. Заметим, что конус  $\text{Co}\{D_k\}$  является при этом подходящим.

**Основной цикл алгоритма.**

**Шаг 1.** Проекция на подпространство  $L_k = a + \text{aff}\{D_k\}$ . Решаем задачу

$$\min_{z \in a + L_k} \|z\|^2 = \|z^{k+1}\|^2 = \min_{x \in L_k} \|x + a\|^2 = \|x^{k+1} + a\|^2$$

и проверяем, является ли конус  $\text{Co}\{D_k\}$  подходящим ( $x^{k+1} \in \text{Co}\{D_k\}$ ). Заметим, что в любом случае  $\|z^k\| > \|z^{k+1}\|$ . Если конус  $\text{Co}\{D_k\}$  подходящий, то переходим к шагу 2. В противном случае выполняется шаг 3.

**Шаг 2.** Проверка оптимальности. Если  $z^{k+1} a^i \geq 0$  для всех  $i = 1, 2, \dots, m$ , то  $z^{k+1}$  – решение задачи (14). Действительно, при этом  $z^{k+1} u \geq 0$  для любого  $u \in \text{Co}\{D\}$  и  $z^{k+1}(a + u) = \|z^{k+1}\|^2 + z^{k+1} u \geq \|z^{k+1}\|^2$ , т.е. гиперплоскость  $z^{k+1} x = \|z^{k+1}\|^2$  разделяет  $z^{k+1}$  и множество  $a + \text{Co}\{D\}$ , так как  $z^{k+1}(x - z^{k+1}) \geq 0$  для  $x \in a + \text{Co}\{D\}$ . при этом для любого  $x \in a + \text{Co}\{D\}$  имеем место оценка

$$\|x\|^2 = \|z^{k+1} + x - z^{k+1}\|^2 = \|z^{k+1}\|^2 + 2z^{k+1}(x - z^{k+1}) + \|z^{k+1} - x\|^2 \geq \|z^{k+1}\|^2$$

и, следовательно,  $z^{k+1}$  реализует  $\min_{z \in a + \text{Co}\{D\}} \|z\|^2$ . Легко видеть, что справедливо и обратное – оптимальность  $z^{k+1}$  влечет  $z^{k+1} u \geq 0$  для всех  $u \in \text{Co}\{D\}$ . Работа алгоритма при этом прекращается.

В противном случае выполняется шаг 4.

**Шаг 3.** Внутренний цикл построения нового базиса. Счетчик внутренних итераций полагается равным нулю  $j = 0$ ,  $w^s = z^{k+1}$ ,  $w^{-1} = z^k$ ,  $K_s = D_k$ .

**Итерация внутреннего цикла.** Определяем максимальное  $\lambda_s > 0$  такое, что

$$w^{s+1} = \lambda_s w^s + (1 - \lambda_s) w^{s-1} \in \text{Co} K_s.$$

При этом  $w^{s+1}$  принадлежит некоторой грани конуса  $\text{Co}\{K_s\}$ , которая задается своим множеством образующих  $K_{s+1} \subset K_s$ , причем включение строгое. Несложно показать, что при этом  $\|w^{s+1}\|^2 < \|w^{s-1}\|^2$ . Решаем задачу

$$\min_{w \in a + \text{aff}\{K_{s+1}\}} \|w\|^2 = \|w^{s+1}\|^2.$$

Если  $\text{Co}\{K_{s+1}\}$  – подходящий конус, то полагаем  $D_{k+1} = K_{s+1}$  и прерываем исполнение внутреннего цикла. В противном случае увеличиваем счетчик итераций  $s \rightarrow s + 1$  и повторяем итерацию внутреннего цикла. Заметим, что, в силу монотонного строгого убывания  $K_s$ , внутренний цикл может быть исполнен лишь конечное число раз.

**Конец внутреннего цикла.**

**Шаг 4.** Полагаем  $J_{k+1} = J_k$ , увеличиваем счетчик итераций  $k \rightarrow k + 1$  и повторяем шаг 1.

**Конец основного цикла.**

**Конец алгоритма.**

Доказательство сходимости этого алгоритма можно получить из тех его свойств (монотонности убывания нормы текущей проекции, конечность числа подходящих конусов и пр.), на которые обращалось внимание при его изложении. В идейном плане это доказательство весьма близко к доказательству сходимости алгоритма из [2] и поэтому здесь не приводится.

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для иллюстрации практической применимости описанного подхода приведем результаты численных экспериментов по проекции начала координат на многогранники высокой размерности, задаваемые системами неравенств со случайными нормально распределенными коэффициентами.

В этих тестах система неравенств строилась как набор  $m$  случайных опорных плоскостей к  $n$ -мерной сфере с центром в случайной точке  $x^0$  с нормально распределенными координатами и радиусом  $r = \theta \|x^0\|$ ,  $\theta \in (0, 1)$ .

Для того чтобы избежать тривиального решения, к набору опорных плоскостей добавлялась одна специальная, построенная таким образом, чтобы гарантированно строго отделить начало координат от многогранника. Для этого использовалась одна из касательных плоскостей к сфере, проходящая также и через начало координат. Опорный вектор такой плоскости может быть определен как  $\bar{a} = \rho z - \gamma x^0$ , где  $\rho = \theta \sqrt{1 - \theta^2}$ ,  $\gamma = \theta^2$ , а случайный вектор  $z$  ортогонален  $x^0$  и принадлежит  $(n - 1)$ -мерной единичной сфере. Правая часть неравенства  $\bar{a}x \leq \beta$  определялась при этом как  $\beta < \frac{1}{2} \bar{a}x^0 = -\frac{1}{2} \theta^2 \|x^0\|^2 < 0$ , что гарантировало строгую отделимость начала координат от допустимого множества. Одновременно с этим  $\bar{a}x^0 = -\theta^2 \|x^0\|^2 < \beta$ , что сохраняло допустимое множество непустым.

В некотором смысле включение этого неравенства было перестраховкой, так как при больших  $m$ , существенно больших  $n$ , среди случайно сгенерированных плоскостей было достаточно много (порядка 30–50%) плоскостей, уже отделяющих начало координат от допустимого множества. Вместе с тем в оптимальное решение эта специальная плоскость, как правило, не входила, что позволяет утверждать, что никаких особенностей ее присутствие в наборе ограничений не создавало.

Для облегчения возможности проведения сравнительных экспериментов ниже приведен текст генератора данных (матрицы  $A$  и правых частей системы вектора  $b$ ) на языке матрично-векторного вычислителя octave (см. [7]). Этот же генератор можно без изменений запустить и в системе MATLAB:

```
function [ A b ] = genAb(kseed, n, m, r)
randn('seed', kseed);
A      = zeros(m, n); b      = zeros(m, 1);
v      = randn(n, 1); v      = v/norm(v);
x0     = randn(n, 1); sx2    = sumsq(x0);
sx     = norm(x0);
zp     = v - (v'*x0)*x0/sx2; zp     = zp/norm(zp);
g      = r*sqrt(1-r^2)*norm(x0);
z      = g*zp - r^2*x0;
A(1, :) = z';          b(1)     = -r^3*sumsq(x0)/2;
for i = 2:m
    z = randn(1, n); A(i, :) = z;
    b(i) = z*x0 + r*sx*norm(z);
endfor
endfunction
```

В списке параметров функции genAb, используемых при вызове, kseed – инициализатор датчика случайных чисел (целое число),  $n$  – размерность пространства переменных,  $m$  – количество неравенств,  $r$  – относительный размер сферы. По завершению работы функция возвращает сгенерированные матрицу системы ограничений  $A$  и вектор правых частей  $b$ . Как показали пробные запуски, этот тест при одинаковых значениях kseed идентичным образом воспроизводится и на платформах Windows, Linux, однако на PowerPC генерируются отличающиеся данные.



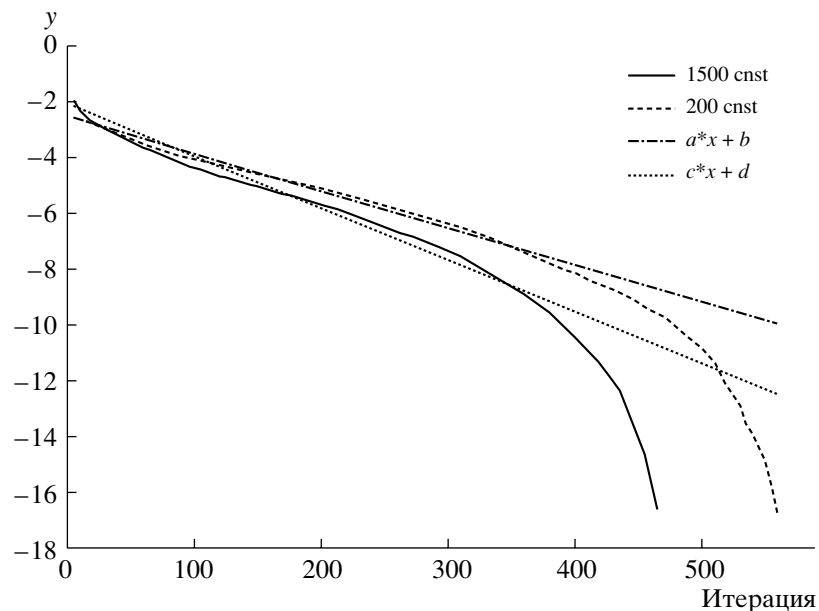
Таблица

$n$	$m$	min	max	ave	std	ntest	fail
1000	1500	470	490	476.7143	7.0170	7	0
1000	1600	478	521	500.3000	14.5911	10	0
1000	1700	502	541	523.1000	11.3964	10	0
1000	1800	516	558	537.3000	14.8702	10	0
1000	1900	549	581	567.5556	11.7698	9	0
1000	2000	568	596	581.2857	10.7659	7	0
1500	1800	535	567	554.0000	12.9228	5	0
1500	1900	567	595	576.7500	12.7639	4	0
1500	2000	574	616	596.7500	17.6517	4	0
1500	2100	595	631	617.6667	19.7315	3	0

Результаты вычислительных экспериментов приведены в таблице, где показана проекция на случайный многогранник. Здесь  $n$  – размерность пространства переменных,  $m$  – количество неравенств, min – минимальное количество итераций в серии тестов, max – максимальное, ave – среднее, std – среднеквадратичное отклонение количества итераций от среднего, ntest – количество решенных тестовых задач, fail – количество задач, решить которые не удалось.

Из результатов экспериментов видно, что метод проекции работал достаточно устойчиво с весьма медленно растущим количеством итераций при увеличении как количества переменных, так и количества ограничений. При использовании стандартного пересчета оператора проекции в модификации метода [2], трудоемкость итерации составляет величину порядка ( $O(n^2)$ ).

На фигуре показаны детали сходимости при решении задачи (14): проекция на допустимое множество 1000 переменных для 1500 и 2000 ограничений. Показано убывание отклонения нормы вектора проекции от минимального значения по итерациям алгоритма. Масштаб по оси  $y$  логарифмический, хорошо видна “лучше чем линейная” сходимость с ускорением в начале и конце процесса. Виден линейный характер сходимости в течение основного хода вычислительного процесса с характерным ускорением в начале и конце итераций. Аппроксимация линейно сходящимися процессами, также показанная на графике, дает оценку множителей геометрической прогрессии: для случая 1500 ограничений она равна 0.9818, для случая 2000 ограничений равна



Фигура.

0.9868; ухудшение всего на 0.5%, что можно в общем-то отнести на неточность определения самого множителя. Что касается его величины, то для таких размерностей следует признать его достаточно малым и сравнимым с теоретическими оценками проективных методов.

Из-за большого объема исходных данных (25–35 Мб) не удалось провести сравнительные эксперименты со свободно распространяемыми версиями оптимизирующих солверов, таких как CPLEX [8], MINOS, промышленная версия CPLEX (ILOG CPLEX 10.2), используя проективный метод, решила ряд приведенных тестов за существенно меньшее количество итераций (10–15), что типично для методов типа внутренних точек, однако в силу закрытого характера пакета определить, за счет чего именно получено такое количество итераций не представляется возможным. Также неправомерно сравнить общую вычислительную эффективность из-за весьма различного уровня реализаций.

В заключение автор хотел бы выразить свою благодарность И.Л. Васильеву (Институт динамики систем и теории управления СО РАН) за проведенные вычислительные эксперименты по решению задачи проекции с помощью CPLEX.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нурминский Е.А. Метод последовательных проекций для решения задачи о наименьшем расстоянии для симплексов // Электронный журнал “Исследовано в России”. 2004. Т. 160. С. 1732–1739. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2004/160.pdf>.
2. Нурминский Е.А. Метод подходящих аффинных подпространств для решения задачи проекции на симплекс // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 11. С. 1996–2004.
3. Нурминский Е.А., Ускорение итеративных методов проекции на многогранник // Дальневосточный матем. сборник. 1995. Вып. 1. С. 51–62.
4. Lemarechal C., Hiriart-Urruty J.-B. Convex analysis and minimization algorithms. II // Berlin: Springer Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. 1993. V. 306. P. 346.
5. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
6. Козлов М.А., Тарасов С.П. Хачиян Л.Г. Полиномиальная разрешимость выпуклого квадратичного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 5. С. 1319–1323.
7. Octave [Электронный ресурс] <http://www.octave.org>. – Режим доступа: свободный.
8. ILOG CPLEX [Электронный ресурс] <http://www.ilog.com/products/cplex/>. – Режим доступа: свободный.