ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2007, том 47, № 3, с. 355–363

УДК 519.642.8

МЕТОД ЛОКАЛЬНЫХ ВЫПУКЛЫХ МАЖОРАНТ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННО-ПОДОБНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Е. А. Нурминский*, Н. Б. Шамрай**

(690041 Владивосток, ул. Радио, 5, Ин-т автоматики и процессов управления РАН;*

*** 690039 Владивосток, ул. Суханова, 8, Дальневосточный гос. ун-т)*

e-mail: nurmi@dvo.ru; nb–shamray@mail.ru

Поступила в редакцию 09.03.2006 г.
Переработанный вариант 15.09.2006 .

Для вариационно-подобного предложен численный метод решения, основанный на выпуклых аппроксимациях, локально мажорирующих оценочную функцию. Дано теоретическое обоснование алгоритма, и приведены результаты сравнения вычислительной эффективности предлагаемого подхода с традиционными. Библ. 23. Фиг. 1.

Ключевые слова: вариационные и вариационно-подобные неравенства, оценочные функции, выпуклая оптимизация, метод локальных выпуклых мажорант.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для изучения многих задач из разных областей знаний, например таких, как математическая физика, исследование операций, математическая экономика и др., активно используется аппарат вариационных неравенств и их обобщений. Задача решения вариационного неравенства, обозначаемая в дальнейшем через VI(G, X), состоит в нахождении точки $x \in X$ такой, что

$$G^{\mathrm{T}}(x)(y - x) \geq 0 \quad \forall y \in X, \tag{1}$$

где $G : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – некоторое заданное отображение, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – непустое выпуклое замкнутое множество (см. [1]–[3]). Используемые обозначения будут объяснены далее.

Аппарат решения VI(G, X) уже достаточно хорошо разработан (см., например, монографии [4], [5] и ссылки в них), однако для обобщений (1) условия применимости существующих методов остаются весьма ограничительными. Для сходимости обычно требуются сильная монотонность и липшицевость входящих в обобщенное вариационное неравенство отображений или их производных (см. [6], [7]).

Одним из широко используемых подходов к исследованию и решению VI(G, X) является построение эквивалентной оптимизационной задачи и дальнейшее применение методов математического программирования для ее решения. Важную роль в таком преобразовании играют оценочные функции из [8], характеризующие меру отклонения от решения данного неравенства.

В настоящей работе рассматривается вариационно-подобное неравенство, являющееся одним из непосредственных обобщений задачи (1), и предлагается метод его решения, также основанный на условной оптимизации оценочной функции. Дается теоретическое обоснование метода, и приводятся результаты сравнения вычислительной эффективности предлагаемого подхода с традиционными. Основная идея алгоритма состоит в комбинации метода доверительных окрестностей (trust-region, box-step) (см. [9]) с построением выпуклой аппроксимирующей мажоранты оценочной функции. При достаточно необременительных условиях на отображения, задающие вариационно-подобное неравенство, может быть построена слабо выпуклая (см. [10]) оценочная функция. Построение выпуклых мажорант, эквивалентных таким оценочным функциям с точки зрения локальной оптимизации, является задачей, по сути дела совпадающей с вычислением самой оценочной функции. Хотя алгоритм является локальным и нуждается в достаточно хорошем начальном приближении, он не требует от отображений свойств типа монотонности.

1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ есть n-мерное евклидово пространство, элементы которого считаются вектор-столбцами; $^{\mathrm{т}}$ – символ транспонирования; $a_+ = \max\{a, 0\}$ – положительная срезка числа a; $\|x\| = \sqrt{x^{\mathrm{т}}x}$ – евклидова норма вектора x; $\nabla F(x)$ – матрица Якоби отображения $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ в точке x, при $m = 1$ – градиент $F(x)$ в точке x; $U_\delta(\bar{x}) = \{x : \|x - \bar{x}\| \le \delta\}$ есть δ-окрестность точки $\bar{x}$; $f'(x, d) = \lim\limits_{\tau \to +\infty} [f(x + \tau d) - f(x)]/\tau$ – производная функции f по направлению d.

В дальнейшем потребуются некоторые свойства слабо выпуклых функций.

Определение 1. (см. [10]). Функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *слабо выпуклой на* X, если для любого $x \in X$ существует непустое множество $D(x)$ векторов g таких, что

$$f(y) - f(x) \ge g^{\mathrm{т}}(y - x) + r(x, y) \quad \forall y \in X,$$

где $|r(x, y)|/\|x - y\| \longrightarrow 0$ при $x \longrightarrow y$ равномерно по x в каждом компактном подмножестве X.

Для настоящей работы наибольший интерес представляют следующие свойства слабо выпуклых функций:

1) непрерывно дифференцируемая функция является слабо выпуклой;

2) если $f(x)$ – слабо выпуклая функция, то существует ее производная по направлению $f'(x, d)$;

3) пусть $f(x, y)$ – слабо выпуклая по x функция для любого фиксированного $y \in X$, $Y(x)$ – множество тех $y \in Y$, на которых достижим $\sup\limits_{y \in Y} f(x, y) = w(x)$, тогда $w(x)$ – слабо выпуклая функция и $w'(x, d) = \sup\limits_{y \in Y(x)} f'(x, y, d)$, где $f'(x, y, d)$ – производная $f(x, y)$ по x в направлении d.

2. ВАРИАЦИОННО-ПОДОБНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Пусть заданы непустое выпуклое замкнутое подмножество X пространства $\mathbb{R}^n$ и однозначные непрерывные отображения $G, F : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Задача решения вариационно-подобного неравенства, обозначаемая в дальнейшем через VLI(G, F, X), состоит в нахождении точки $x \in X$ такой, что

$$G^{\mathrm{т}}(x)[F(y) - F(x)] \ge 0 \quad \forall y \in X. \tag{2}$$

Термин “вариационно-подобное неравенство” (variational-like inequality) впервые введен в [11] для задачи нахождения точки $x \in X$, удовлетворяющей условию

$$G^{\mathrm{т}}(x)\eta(y, x) \ge 0 \quad \forall y \in X, \tag{3}$$

где $G : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\eta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – заданные непрерывные отображения, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – непустое выпуклое замкнутое множество. Так как при $\eta(y, x) = F(y) - F(x)$ и $m = n$ условия (2) и (3) совпадают, то неравенство (2) также будем называть вариационно-подобным.

Как показано в [1], VLI(G, F, X) – имеет решение, если выполнено одно из следующих условий:

1) X – ограниченное множество и при любом фиксированном $x \in X$ функция $G^{\mathrm{т}}(x)F(y)$ квазивыпукла по $y \in X$;

2) при любом фиксированном $x \in X$ функция $G^{\mathrm{т}}(x)F(y)$ выпукла по $y \in X$ и существует компактное подмножество $\Omega \in X$ такое, что для любого $x \in X\backslash\Omega$ справедливо неравенство

$$G^{\mathrm{т}}(x)(F(y) - F(x)) < 0 \quad \forall y \in X.$$

К вариационно-подобным неравенствам (2) приводит, например, замена переменных в (1) с целью упрощения допустимой области X. Кроме того, в терминах VLI(G, F, X) могут быть записаны задачи определения обобщенного решения системы неравенств (см. [12]) задачи транспортного и экономического равновесий (см. [13]–[15]).

Определение 2. *Оценочной функцией* для вариационного (1) (вариационно-подобного (2)) неравенства назовем функцию $\varphi : X \longrightarrow R \cup \{+\infty\}$, обладающую следующими свойствами:

(i) $\varphi(x) \ge 0$ $\forall x \in X$;

(ii) $x^* \in X$ является решением вариационного (1) (вариационно-подобного (2)) неравенства тогда и только тогда, когда $\varphi(x^*) = 0$ и $x^* \in X$.

Очевидно, что при этом VLI(G, F, X) эквивалентна задаче условной оптимизации

$$\min_{x \in X} \varphi(x). \tag{4}$$

Для вариационного неравенства (1) существует много работ, посвященных различным типам оценочных функций. Наиболее общий вид оценочной функции предложен в [16]:

$$\nu(x) = \sup_{y \in X} \{f(x) - f(y) + [G(x) - \nabla f(x)]^{\mathrm{T}}(x - y)\}, \tag{5}$$

где $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ – выпуклая, полунепрерывная снизу дифференцируемая на X функция. Отметим, что (5) является задачей выпуклого программирования, но трудно гарантировать свойства выпуклости и дифференцируемости для $\nu(x)$.

Наряду с прямой оценочной функцией (5) в [16] рассматривается ее дуальная формулировка:

$$\tilde{\nu}(y) = \inf_{x \in X} \{f(x) - f(y) + [G(x) - \nabla f(x)]^{\mathrm{T}}(x - y)\}, \tag{6}$$

и эквивалентная оптимизационная задача для (1) будет состоять в максимизации $\tilde{\nu}(y)$ по $y \in X$. Здесь (6), вообще говоря, не является задачей выпуклого программирования, однако $\tilde{\nu}(y)$ вогнута.

Частные случаи функций (5) и (6) с $f \equiv 0$ были предложены в [17] для нахождения равновесия в задачах теории игр, далее изучены в [18] и последующих работах. При этом основные результаты получены для случая, когда супремум в (5) достижим в единственной точке и, следовательно, функция $\nu(x)$ является дифференцируемой. Другим способом достижения дифференцируемости $\nu(x)$ является использование сильно выпуклых функций $f(x)$, например $f(x) = (1/2)\|x\|^2$ (см. [19]). Дифференцируемые функции исследованы также в [18], [20] и др.

В данной работе для VLI(G, F, X) рассмотрена оценочная функция

$$\varphi(x) = \sup_{y \in X} G^{\mathrm{T}}(x)[F(x) - F(y)]. \tag{7}$$

Легко видеть, что эта функция удовлетворяет свойствам (i) и (ii) определения 2.

В самом деле, для любого $x \in X$

$$\varphi(x) = \sup_{y \in X} G^{\mathrm{T}}(x)[F(x) - F(y)] \ge G^{\mathrm{T}}(x)[F(x) - F(x)] = 0. \tag{8}$$

Если $x^* \in X$ – решение задачи VLI(G, F, X), то

$$G^{\mathrm{T}}(x^*)[F(x^*) - F(y)] \le 0 \quad \forall y \in X$$

и, следовательно,

$$\varphi(x^*) = \sup_{y \in X} G^{\mathrm{T}}(x^*)[F(x^*) - F(y)] \le 0.$$

Однако, в силу (8), $\varphi(x^*) \ge 0$, следовательно, $\varphi(x^*) = 0$.

Обратно: пусть для некоторого $x^* \in X$ справедливо соотношение

$$0 = \varphi(x^*) = \sup_{y \in X} G^{\mathrm{T}}(x^*)[F(x^*) - F(y)] \quad \forall y \in X,$$

следовательно, x^* – решение задачи VLI(G, F, X).

При всех своей концептуальной простоте функция (7) обладает рядом недостатков: это, вообще говоря, негладкая функция и, кроме того, трудно гарантировать ее выпуклость для нелинейных G и F. Однако если G и F являются непрерывно дифференцируемыми и для любого $x \in X$ супремум в (7) достижим, то $\varphi(x)$ – слабо выпуклая функция (см. [10]).

В настоящей работе для решения задачи (4) предлагается построить выпуклую аппроксимацию оценочной функции (7), в значительной степени эквивалентную $\varphi(x)$ с точки зрения ее оптимизации в окрестности приближенного решения.

3. ЛОКАЛЬНАЯ ВЫПУКЛАЯ МАЖОРАНТА ОЦЕНОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Далее будем предполагать, что отображения G и F являются дважды непрерывно дифференцируемыми на X и для любого $x \in X$ супремум в (7) достижим.

Зафиксируем точку $\bar{x} \in X$ и выделим ее δ-окрестность $U_\delta(\bar{x})$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Окрестность $U_\delta(\bar{x})$ выбирается так, чтобы для некоторого $R > 0$ и любых $y \in X$, $x_\delta \in U_\delta(\bar{x})$, $z \in \mathbb{R}^n$ выполнялись неравенства

$$\left|z^{\mathrm{T}} H_1(x_\delta) z\right| \le R\|z\|^2, \quad \left|z^{\mathrm{T}} H_2(x_\delta, y) z\right| \le R\|z\|^2,$$

где $H_1(x_\delta)$ и $H_2(x_\delta, y)$ – матрица вторых производных в точке x_δ функций $G^{\mathrm{T}}(x)F(x)$ и $-G^{\mathrm{T}}(x)F(y)$ соответственно.

$$\begin{aligned} h(x, y) &= G^{\mathrm{T}}(x)[F(x) - F(y)], \\ c_0(\bar{x}) &= G^{\mathrm{T}}(\bar{x})F(\bar{x}), \\ C(\bar{x}) &= F^{\mathrm{T}}(\bar{x})\nabla G(\bar{x}) + G^{\mathrm{T}}(\bar{x})\nabla F(\bar{x}), \\ A(\bar{x}, z) &= \nabla G(\bar{x})z + G(\bar{x}), \end{aligned} \tag{9}$$

и пусть $Z(x) = \{z : \|z\| \le \delta, x + z \in X\}$ – множество допустимых смещений из точки x, по норме не превышающих δ.

Пусть $z \in Z(\bar{x})$, $x = \bar{x} + z$. Для $h(x, y)$ справедлива оценка

$$\begin{gathered} h(x, y) = h(\bar{x} + z, y) = G^{\mathrm{T}}(\bar{x} + z)[F(\bar{x} + z) - F(y)] = c_0(\bar{x}) + C(\bar{x})z - F^{\mathrm{T}}(y)A(\bar{x}, z) + \\ + (1/2)z^{\mathrm{T}}H_1(x_\delta)z + (1/2)z^{\mathrm{T}}H_2(x_\delta)z \le c_0(\bar{x}) + C(\bar{x})z + R\|z\|^2 - F^{\mathrm{T}}(y)A(\bar{x}, z) = \tilde{h}(\bar{x}, y, z). \end{gathered} \tag{10}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(\bar{x}, z) = \sup_{y \in X} \tilde{h}(\bar{x}, y, z) = c_0(\bar{x}) + C(\bar{x})z + R\|z\|^2 - \inf_{y \in X} F^{\mathrm{T}}(y)A(\bar{x}, z), \tag{11}$$

где будем предполагать, что супремум достижим для всех $\bar{x} \in X$ и $z \in Z(\bar{x})$. Заметим, что $\psi(\bar{x}, z)$ выпукла по z.

В силу оценки (10) выполнено следующее неравенство:

$$\sup_{y \in X} h(\bar{x} + z, y) = \varphi(\bar{x} + z) \le \psi(\bar{x}, z),$$

причем при $z = 0$ имеет место равенство.

Взаимосвязь между вариационно-подобным неравенством (2) и функцией $\psi(\bar{x}, z)$ устанавливает

Теорема 1. *Точка x^* является решением задачи* VLI(G, F, X) *тогда и только тогда, когда $z = 0$ есть решение задачи*

$$\min_{z \in Z(x^*)} \psi(x^*, z) \tag{12}$$

и $\psi(x^*, 0) = 0$.

Доказательство. Пусть x^* – решение задачи VLI(G, F, X) и, следовательно, x^* – решение задачи (4) и $\varphi(x^*) = 0$; тогда для любого $z \in Z(x^*)$ имеем

$$\psi(x^*, 0) = \varphi(x^*) \le \varphi(x) = \varphi(x^* + z) \le \psi(x^*, z).$$

Таким образом, $z = 0$ – решение задачи (12) и $\psi(x^*, 0) = 0$.

Обратно: пусть $z = 0$ является решением задачи (12) и $\psi(x^*, 0) = 0$. Так как $x^* \in X$ и верна оценка

$$0 = \psi(x^*, 0) = \varphi(x^*),$$

то, в силу свойства (ii) определения 2, точка x^* – решение VLI(G, F, X).

Обозначим через $\varphi'(x, d)$ и $\psi'(\bar{x}, z, d)$ производные по направлениям функций (7) и (11) по переменным x и z соответственно, т.е.

$$\varphi'(x, d) = \lim_{\tau \to +0}[\varphi(x + \tau d) - \varphi(x)]/\tau, \tag{13}$$

$$\psi'(\bar{x}, z, d) = \lim_{\tau \to +0}[\psi(\bar{x}, z + \tau d) - \psi(\bar{x}, z)]/\tau. \tag{14}$$

Пределы (13) и (14) существуют в силу предположения о достижимости соответствующих супремумов в (7) и (11), слабой выпуклости $\varphi(\cdot)$ и выпуклости $\psi(\bar{x}, \cdot)$ (см. [10]).

Как показывает следующее утверждение, $\psi(\bar{x}, z)$ достаточно хорошо аппроксимирует поведение $\varphi(x)$ в окрестности точки $\bar{x}$.

Лемма. *Пусть* $\bar{x} \in X$, *тогда для любого* $d \in Z(\bar{x})$ *имеет место соотношение*

$$\varphi'(\bar{x}, d) = \psi'(\bar{x}, 0, d).$$

Доказательство. Пусть $Y(x)$ – множество тех $y \in X$, на которых достигается супремум в (7). В силу слабой выпуклости $\varphi(x)$,

$$\varphi'(x, d) = \sup_{y \in Y(x)} h'(x, y, d) = \sup_{y \in Y(x)} h'_x(x, y)d = C(x)d - \inf_{y \in Y(x)}[F^{\mathrm{T}}(y)\nabla G(x)d].$$

Пусть $\tilde{Y}(\bar{x}, z)$ – множество тех $y \in X$, на которых достигается супремум в (11). Аналогично, в силу выпуклости $\psi(\bar{x}, z)$ по z,

$$\psi'(\bar{x}, z, d) = \sup_{y \in \tilde{Y}(\bar{x}, z)} \tilde{h}'(\bar{x}, y, z, d) = \sup_{y \in \tilde{Y}(\bar{x}, z)} \tilde{h}'_z(\bar{x}, y, z)d = C(\bar{x})d + 2Rz^{\mathrm{T}}d - \inf_{y \in \tilde{Y}(\bar{x}, z)}[F^{\mathrm{T}}(y)\nabla G(x)d].$$

При $x = \bar{x}$ и $z = 0$ множества $Y(x)$ и $\tilde{Y}(\bar{x}, z)$ совпадают, т.е. $Y(\bar{x}) = \tilde{Y}(\bar{x}, 0)$, следовательно,

$$\varphi'(\bar{x}, d) = \psi'(\bar{x}, 0, d).$$

Из приведенной леммы, в частности, следует, что точка $\bar{x}$ является стационарной для $\varphi(x)$ тогда и только тогда, когда $z = 0$ – стационарная точка функции $\psi(\bar{x}, z)$.

4. МЕТОД ЛОКАЛЬНОЙ ВЫПУКЛОЙ МАЖОРАНТЫ

Используя локальную аппроксимируемость $\varphi(x)$ при $x \in U_\delta(\bar{x})$ выпуклой мажорантой $\psi(\bar{x}, z)$ при $z \in Z(\bar{x})$, описываемую леммой, предлагаем следующий алгоритм решения вариационно-подобного неравенства (2).

Инициализация алгоритма

Выберем точку $x^0 \in X$ и рассмотрим множество $X^0 = \{x : \varphi(x) \le \varphi(x^0)\}$. Определим $\delta > 0$ такое, что для любого $\bar{x} \in X^0$ и $z \in Z(\bar{x})$ выполняется условие

$$\varphi(\bar{x} + z) \le \psi(\bar{x}, z).$$

В качестве начальной возьмем точку $\bar{x}^0 \in X^0$. Положим $k = 0$.

Итерация алгоритма

Шаг 1. Решить задачу

$$\min_{z \in Z(\bar{x}^k)} \psi(\bar{x}^k, z) = \psi(\bar{x}^k, z^k). \tag{15}$$

Шаг 2. Если $z^k = 0$ и $\psi(\bar{x}^k, 0) = 0$, то $\bar{x}^k$ – решение задачи VLI(G, F, X). Если $z^k = 0$, но $\psi(\bar{x}^k, 0) \neq 0$, то VLI($G$, F, X) либо решения не имеет, либо мы нашли локальный минимум оценочной функции φ. Алгоритм заканчивает работу.

Шаг 3. Положить $\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k + z^k$, $k = k + 1$ и перейти на шаг 1.

Обоснование сходимости метода дает

Теорема 2. *Пусть вектор* x^0 *таков, что множество* X^0 *не содержит локальных минимумов и стационарных точек оценочной функции* $\varphi(x)$, *отличных от глобальных. Тогда последовательность* $\{\bar{x}^k\}$, *генерируемая алгоритмом, сходится к решению задачи* VLI(G, F, X).

Доказательство. Пусть z^k – решение задачи (15), тогда

$$\varphi(\bar{x}^k) = \psi(\bar{x}^k, 0) \ge \psi(\bar{x}^k, z^k) \ge \varphi(\bar{x}^k + z^k) = \varphi(\bar{x}^{k+1});$$

таким образом, последовательность $\{\varphi(\bar{x}^k)\}$ монотонно убывает и существует предел $\varphi^* = \lim\limits_{k \to \infty} \varphi(\bar{x}^k)$.

Зафиксируем некоторое $z \in Z(\bar{x}^k)$. По построению,

$$\psi(\bar{x}^k, z^k) \le \min_{\theta \in [0,1]} \psi(\bar{x}^k, \theta z) \le \psi(\bar{x}^k, 0) + \min_{\theta \in [0,1]} [\theta\psi'(\bar{x}^k, 0, z) + o(\theta)].$$

Если предположить, что для сколь угодно большого K существует $k > K$, $\gamma > 0$ и $\bar{z}^k \in Z(\bar{x}^k)$ такие, что $\psi(\bar{x}^k, 0, \bar{z}^k) \le -\gamma < 0$, то

$$\psi(\bar{x}^k, z^k) \le \psi(\bar{x}^k, 0) + \theta[-\gamma + o(\theta)/\theta] \le \psi(\bar{x}^k, 0) - \theta\gamma/2$$

для достаточно малых $\theta > 0$. Выбрав такое θ и зафиксировав его, получим

$$\varphi(\bar{x}^{k+1}) \le \psi(\bar{x}^k, 0, z^k) \le \psi(\bar{x}^k, 0) - \varepsilon = \varphi(\bar{x}^k) - \varepsilon, \tag{16}$$

где $\varepsilon = \theta\gamma > 0$. Переходя к пределу в (16) по $K \longrightarrow \infty$, получаем

$$\varphi^* \le \varphi^* - \varepsilon,$$

что невозможно. Отсюда, в частности следует, что

$$\lim_{k \to \infty} \inf_{z \in Z(\bar{x}^k)} \psi'(\bar{x}^k, 0, z) = \lim_{k \to \infty} \inf_{z \in Z(\bar{x}^k)} \varphi'(\bar{x}^k, z) \ge 0,$$

и в силу полунепрерывности сверху $Y(x)$ получаем для любого $z \in Z(\bar{x})$ неравенство

$$\varphi'(\bar{x}, z) \ge \inf_{z \in Z(\bar{x})} \varphi'(\bar{x}, z) \ge \lim_{k \to \infty} \inf_{z \in Z(\bar{x}^k)} \varphi'(x^k, z) \ge 0$$

для любой предельной точки $\bar{x}$ последовательности $\{\bar{x}^k\}$. Таким образом, в $\bar{x}$ удовлетворяются необходимые условия экстремума для $\varphi(x)$, $x \in X$, и, следовательно, $\bar{x}$ является решением задачи (2).

5. ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

Чтобы подчеркнуть некоторые преимущества переформулировки исходной задачи в виде вариационно-подобного неравенства и применения метода локальных выпуклых мажорант, сравним предлагаемый подход с традиционным, основанным на минимизации регуляризованной оценочной функции. В качестве примера рассмотрим вариационное и вариационно-подобное неравенства, порождаемые оптимизационной задачей

$$\min_{u \in U} g(u), \tag{17}$$

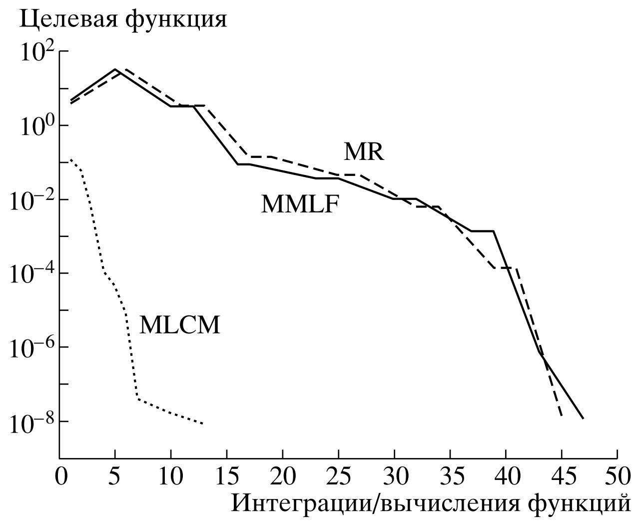
где $g(u) = (1/4)(u_1 - u_2)^2 - (1/2)(u_1 - u_2)$, $U = \{u : \|u\|^2 \le 1, u \ge 0\}$, решением которой является точка $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Метод регуляризации (MR)

Задача (17) эквивалентна вариационному неравенству

$$Q^{\mathrm{T}}(u)(v - u) \ge 0 \quad \forall v \in U, \tag{18}$$

где $Q^{\mathrm{T}}(u) = (1/2)(u_1 - u_2 - 1, u_2 - u_1 - 1) = \nabla g(u)$.



Фигура.

В формуле (5) положим $f(u) = (1/2)\|u\|^2$. При этом регуляризованная оценочная функция для (18) имеет вид

$$\nu(u) = \|u - a(u)\|^2 - [\|a(u)\| - 1]_+^2, \tag{19}$$

где $a^{\mathrm{T}}(u) = (1/2)(1 + u_1 + u_2, 1 + u_1 + u_2)$. Подобная регуляризация наиболее часто используется, и $\nu(u)$ называется оценочной функцией Фукушимы (см. [19]). Отметим, что $\nu(u)$ является в данном случае невыпуклой.

Для минимизации $\nu(u)$ при $u \in U$ был применен метод модифицированной функции Лагранжа, реализованный в пакете MINOS (см. [21]). Уменьшение значения $\nu(u)$ в процессе работы алгоритма представлено на фигуре (штриховая линия MR).

Можно предположить, что именно разрыв вторых производных оценочной функции (19) не позволяет достичь более чем линейной скорости сходимости на большей части процесса оптимизации. Ускорение в конце счета связано с выходом в достаточно малую окрестность решения, где $\nu(u)$ имеет уже непрерывные вторые производные.

Для сравнения тем же методом модифицированной функции Лагранжа была решена и исходная задача (17), уменьшение значения целевой функции $g(u)$ также приведено на фигуре (сплошная линия MMLF). Видно, что оба подхода (MR и MMLF) к решению (17) демонстрируют очень близкую вычислительную эффективность, несмотря на существенные отличия в свойствах решаемых задач. По всей видимости, это связано с тем, что в обоих постановках сохранен нелинейный характер ограничений допустимой области U и именно это представляет собой основную вычислительную сложность.

Метод локальных выпуклых мажорант (MLCM)

Поскольку предлагаемый в разд. 4 метод может быть применен к более общему классу вариационных неравенств, чем (18), то возможно упрощение допустимой области U. Замена переменных $u_1^2 = x_1$, $u_2^2 = x_2$ превращает неравенство (18) в вариационно-подобное (2) с основными отображениями

$$G^{\mathrm{T}}(x) = (1/2)(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} - 1, \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} - 1), \quad F^{\mathrm{T}}(x) = (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}), \tag{20}$$

и допустимой областью

$$X = \{x : x_1 + x_2 \le 1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}. \tag{21}$$

Заметим, что X описывается теперь только линейными ограничениями (21).

Оценочная функция (7) для (2) при (20), (21) имеет вид

$$\varphi(x) = G^{\mathrm{T}}F(x) + \begin{cases} \|G(x)\|, & \text{если } G(x) > 0, \\ \mu(x) & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{22}$$

где $\mu(x) = (1/2)\max\{0, 1 - \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}, 1 + \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\}$.

Для $\bar{x} \in X$, $\delta > 0$ локальная выпуклая мажоранта имеет вид

$$\psi(\bar{x}, z) = c_0(\bar{x}) + C(\bar{x})z + R\|x\|^2 + \begin{cases} \|A(\bar{x}, z)\|, & \text{если } A(\bar{x}, z) < 0, \\ \mu(\bar{x}, z) & \text{в противном случаи,} \end{cases}$$

где $z \in Z(\bar{x})$, $\mu(\bar{x}, z) = (1/2)(\max\{0, a_1(\bar{x}, z), a_2(\bar{x}, z)\}$, $c_0(\bar{x})$, $C(\bar{x})$, $A(\bar{x}, z)$ определены в (9), $a_1(\bar{x}, z)$, $a_2(\bar{x}, z)$ – компоненты вектор-функции $A(\bar{x}, z)$ для вариационно-подобного неравенства (2) при (20), (21).

В качестве начальной была выбрана точка $x^0 = [0.2, 0.4]^{\mathrm{T}}$, параметры алгоритма определены как $\delta = 0.1$, $R = 0.5$. Алгоритм реализован на свободно распространяемом MATLAB-подобном языке octave (см. [22]). Для решения задачи выпуклой оптимизации (15) использовался метод отделяющих плоскостей из [23].

На фигуре пунктирной линией MLCM показано убывание оценочной функции $\varphi(x)$ в зависимости от итераций алгоритма. Результат численных экспериментов наглядно демонстрирует существенно более быструю сходимость MLCM по сравнению с MR и MMLF. Следует отметить, что итерации MLCM представляют собой достаточно сложную операцию, поскольку на шаге 1 необходимо решать оптимизационную задачу (15), однако трудоемкость ее решения может быть существенно снижена за счет перезапуска алгоритма с предыдущего оптимума и других способов "горячего старта". В этих условиях модно надеяться на то, что и общая вычислительная эффективность MLCM окажется достаточно высокой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Киндерлелер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983.
2. *Коннов И.В.* Методы решения конечномерных вариационных неравенств: Курс лекций. Казань: Изд-во "ДАС", 1998.
3. *Harker P.T., Pang J.S.* Finite-dimensional variational inequalities and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications // Math. Program. Ser. B. 1990. V. 48. № 2. P. 161–220.
4. *Попов Л.Д.* Введен ие в теорию, методы и экономические приложения задач о дополнительности: Учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2001.
5. *Konnov I.V.* Combined relaxation methods for variational inequalities. Berlin: Springer, 2001.
6. *Коннов И.В.* Комбинированный релаксационный метод для обобщенных вариационных неравенств // Изв. вузов. Математика. 2001. № 12. С. 46–54.
7. *Коннов И.В., Пинягина О.В.* Метод спуска по интервальной функции для негладких задач равновесия // Изв. вузов. Математика. 2003. № 12. С. 71–77.
8. *Patriksson M.* A class of gap functions for variational inequalities // Math. Program. 1994. V. 64. № 1–3. P. 53–79.
9. *Conn A.R., Gould N.I.M., Toint Ph.L.* Trust region methods. Philadelphia: SIAM, 2000.
10. *Нурминский Е.А.* Численные методы решения детерминированных и стохастических минимаксных задач. Киев: Наук. думка, 1979.
11. *Parida J., Sahoo M., Kumar A.* A variational-like inequality problem // Bull. Austral. Math. Soc. 1989. V. 39. P. 225–231.
12. *Булавский В.А.* Методы релаксации для систем неравенств. Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 1981.
13. *Шамрай Н.Б.* О двух подходах к решению систем неравенств // Омский науч. вестн. 2003. Т. 24. № 3. С. 55–57.
14. *Шамрай Н.Б.* Проективный метод для систем неравенств // Докл. АН ВШ РФ. 2005. Т. 4. № 3. С. 36–43.
15. *Шамрай Н.Б.* Применение вариационно-подобных неравенств для решения задач транспортного ценового равновесия // Информатика и системы управления. 2006. Т. 11. № 1. С. 62–72.

16. *Auchmuty G.* Variational principles for variational inequalities // Numer. Funct. Analys. and Optimizat. 1989. № 9–10. P. 863–874.
17. *Зуховицкий С.И., Поляк Р.А., Примак М.Е.* Два метода отыскания точек равновесия вогнутых игр и лиц // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 1. С. 24–27.
18. *Демьянов В.Ф., Певний А.Б.* Численные методы отыскания седловых точек // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 5. С. 1099–1127.
19. *Fukushima M.* Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems // Math. Program. 1992. V. 53. № 1. P. 99–110.
20. *Пшеничный Б.Н., Калжанов М.У.* Метод решения вариационных неравенств // Кибернетика и систем. анализ. 1992. № 6. С. 48–55.
21. Stanford Business Software Inc. [Электронный ресурс] http://www.sbsi-sol-optimize.com/asp/sol–product–minos.htm.
22. Octave Home Page [Электронный ресурс] http://www.octave.org.
23. *Нурминский Е.А.* О методе отделяющих плоскостей с ограниченной памятью // Вычисл. методы и программирование. 2006. Т. 7. С. 133–137.