ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2005, том 45, № 11, с. 1996–2004

УДК 519.677

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПОДХОДЯЩИХ АФФИННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАИМЕНЬШЕМ РАССТОЯНИИ ДО СИМПЛЕКСА[1)]

© 2005 г. Е. А. Нурминский

(690041 Владивосток, ул. Раздио, 5, Ин-т автоматики и процессов управления ДВО РАН)

e-mail: eanurmi@mail.ru

Поступила в редакцию 28.03.2005 г.

Рассматривается задача нахождения вектора минимальной длины в симплексе конечномерного евклидового пространства. Показана глобальная “лучше чем линеная” скорость сходимости алгоритма последовательных проекций на аффинные подпространства, содержащие подходящие подсимплексы исходного симплекса. Приведены результаты вычислительных экспериментов. Библ. 8. Фиг. 2.

Ключевые слова: проекция, элемент минимальной нормы, симплекс.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача нахождения элемента минимальной нормы в заданном множестве часто встречается как в теоретических основаниях многих разделов прикладной математики, так и в приложениях, для которых зачастую характерны весьма высокие размерности и жесткие требования к времени решения задачи. Эти требования стимулировали работу над эффективными алгоритмами проекции, в результате чего был создан ряд методов, обзор которых можно найти, например, в [1].

Высокая размерность задачи вынуждает применять итеративные методы ее решения, и повышение скорости сходимости таких алгоритмов становится важной проблемой. Одним из основных подходов при этом является представление множества C, на которое нужно осуществить проекцию, в виде пересечения “простых” множеств C_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, – полупространств, кубов, простых конусов и пр. и построения итеративных алгоритмов, использующих легко вычисляемые проекции на C_i. Вместе с тем в некоторых задачах естественным образом появляется и внутреннее описание C, как выпуклой оболочки семейства "простых" множеств:

$$C = \operatorname{co}\{C_i, i = 1, 2, \ldots, N\} = \left\{\bigcup_{i=1}^{N} \lambda_i C_i : \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, N\right\},$$

и для решения задачи поиска элемента минимальной нормы в C можно также использовать алгоритмы, основанные на индивидуальных проекциях на C_i и/или простые модификации этих множеств (см., например, [2]). При этом возникает проблема эффективной проекции на составляющие C_i, и в качестве одного из шагов по направлению к ее эффективному решению в [3] был предложен алгоритм проектирования на C_i в том случае, когда они являются симплексами, т.е. выпуклыми оболочками аффинно-независимых векторов конечномерного евклидового пространства $\mathbb{E}$. Предложенный алгоритм использует проекции на аффинные оболочки подсимплексов исходного симплекса и во избежание конфликта с методами последовательных проекций (см. [4], [5]) будет называться методом аффинных подпространств (МАП).

В работе [3] доказана конечная сходимость МАП и приведены обнадеживающие результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующих достаточно высокую эффективность метода, однако вопрос о теоретической оценке скорости сходимости оставался открытым.

Целью данной работы является установление глобальной “лучше чем линейной” скорости сходимости этого алгоритма и демонстрация результатов некоторых обнадеживающих вычислительных экспериментов.

1) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-07-90287в) и Программы 17 Президиума РАН.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Задача поиска элемента минимальной нормы будет рассматриваться в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ с традиционной нормой $\|x\| = \sqrt{xx}$, ассоциированной со скалярным произведением xy. Здесь и далее будем считать, что размерность $\mathbb{E}$ равна n.

Помимо упомянутой выше выпуклой оболочки будет использоваться также и аффинная.

Определение 1. Для $C \subset \mathbb{E}$ множество $\mathrm{aff}\{C\}$, определяемое как

$$\mathrm{aff}\{C\} = \left\{c = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i c^i, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, c^i \in C, i = 1, 2, \ldots, n+1\right\},$$

называется *аффинной оболочкой*.

Аффинная оболочка $\mathrm{aff}\{C\}$ является наименьшим аффинным подпространством, содержащим C. Набор точек $\{x^1, x^2, \ldots, x^m\}$ пространства $\mathbb{E}$ назовем аффинно-независимым, если из

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$$

следует, что $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Через $\mathrm{ri}\{A\}$ будем обозначать относительную внутренность A, т.е. внутренность относительно $\mathrm{aff}\{A\}$.

С каждым аффинным подпространством A можно ассоциировать определенное линейное пространство L_A, называемое присоединенным. В данном случае его можно определить как

$$L_A = \left\{x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a^i, \text{ где } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0, a^i \in A, i = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

В евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ рассматривается задача наименьшего расстояния от заданного множества X до начала координат

$$\max_{z \in X} \|z\|^2 = \|z^*\|^2, \quad z^* \in X. \tag{1}$$

Предполагается, что выпуклое множество X является симплексом, т.е. выпуклым многогранником, заданным аффинно-независимыми вершинами:

$$X = \mathrm{co}\{x^i, i \in \mathcal{N} \triangleq \{1, 2, \ldots N\}\}. \tag{2}$$

Из аффинной независимости следует, что $N \le n + 1$. Условия оптимальности z^* в задаче (1) имеют вид простейшего вариационного неравенства

$$z^*(x - z^*) \ge 0 \quad \forall x \in X \tag{3}$$

и в случае симплекса (2) сводятся к проверке N неравенств $z^* x^i \ge \|z^*\|^2$, $i \in \mathcal{N}$.

Предложенный ниже алгоритм использует проекции на аффинные оболочки подсимплексов X, т.е. решения задач вида

$$\min_{z \in \mathrm{aff}(S_I)} \|z\|^2, \tag{4}$$

где $S_I = \mathrm{co}\{x^i, i \in I \subset \mathcal{N}\}$. Существенную роль играет при этом легко проверяемое свойство: если z^* – решение задачи (4), то $z^* y = 0$ для любого $y \in L_{\mathrm{aff}(S_I)}$.

Для изложения алгоритма и исследования его сходимости полезно ввести

Определение 2. Множество $S_I = \mathrm{co}\{x^i, i \in I\}$, определяемое индексным набором $I \subset \mathcal{N}$, называется *подходящим подсимплексом*, если

$$\min_{z \in \mathrm{aff}\{S_I\}} \|z\|^2 = \min_{z \in S_I} \|z\|^2.$$

Очевидно, например, что любое одноэлементное множество I будет задавать подходящий подсимплекс.

Набор точек $\{x^i, i \in I\}$, а также само индексное множество I, описывающие подсимплекс $S = \mathrm{co}\{x^i, i \in I\}$, будем называть базисом. Базис подходящего подсимплекса будем называть подходящим базисом. Количество векторов в базисе I будем обозначать через $|I|$.

Аффинную оболочку подходящего подсимплекса будем называть подходящим аффинным подпространством.

3. МЕТОД АФФИННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

Алгоритм состоит из итераций, каждая из которых начинается, когда имея в качестве исходных данных имеется подходящий подсимплекс исходного симплекса (базис), и заканчивается построением нового подходящего подсимплекса (нового базиса) со строго меньшим расстоянием до начала координат, чем предыдущий.

Используя некий структурный псевдоязык программирования, описание метода можно представить следующим образом:

Инициализация алгоритма. Пусть I_0 – начальный базис, порождающий соответствующий подходящий подсимплекс $S_{I_0} \triangleq S_0$ и аффинное подпространство H_0:

$$S_0 = \mathrm{co}\{x^i, i \in I_0\}, \quad H_0 = \mathrm{aff}\{x^i, i \in I_0\} = \mathrm{aff}\{S_0\}.$$

Положим счетчик итераций $k = 0$.

Основной цикл алгоритма

Шаг 1. *Проекция на подпространство H_k.* Решаем задачу

$$\min_{z \in H_k} \|z\|^2 = \|z^k\|^2. \tag{5}$$

Шаг 2. *Проверка оптимальности*: в силу (3), если $x^i z^k \geq \|z^k\|^2$ для всех $i \in \mathcal{N} \setminus I_k$, то z^k – решение задачи (1), поскольку $x^i z^k \geq \|z^k\|^2$ для $i \in I_k$ по построению. Работа алгоритма на этом прекращается.

Шаг 3. *Инициализация внутреннего цикла построения нового базиса* (выполняется, если условия оптимальности для z^k не выполнены). Выберем произвольный $i_k \in \mathcal{N} \setminus I_k$ такой, что

$$x^{i_k} z^k < \|z^k\|^2. \tag{6}$$

Положим счетчик внутренних итераций равным нулю: $s = 0$, множество $J_s = I_k \cup \{i_k\}$, $w^s = z^k$.

Шаг 4. *Внутренний цикл.*

(а) Проекция на модифицированный базис: образуем новый подсимплекс $T_s = \mathrm{co}\{x^i, i \in J_s\}$, новое аффинное подпространство $G_s = \mathrm{aff}\{T_s\}$ и решим вспомогательную задачу проекции

$$\min_{y \in G_s} \|y\|^2 = \|y^s\|^2. \tag{7}$$

(б) Проверка допустимости: если $y^s \in T_s$ (т.е. T_s – подходящий подсимплекс), то полагаем $I_{k+1} = J_s$, $H_{k+1} = G_s$ и выходим из внутреннего цикла.

(в) Коррекция базиса (выполняется в том случае, если $y^s \notin T_s$): полагаем

$$u(\mu) = \mu y^s + (1 - \mu) w^s \tag{8}$$

и находим максимальное μ такое, что $u(\mu) \in T_s$, т.е.

$$\mu_s = \max_{u(\mu) \in T_s} \mu. \tag{9}$$

По построению точка $u(\mu)$ при $\mu = \mu_s$ принадлежит относительной внутренности некоторой минимальной грани подсимплекса T_s, которая, соответственно, определяет множество своих крайних точек x^i, $i \in J_{s+1}$, т.е.

$$u(\mu_s) = \sum_{i \in J_{s+1}} \theta_i x^i \triangleq w^{s+1}, \tag{10}$$

где $J_{s+1} \subset \mathcal{N}$ и $\sum_{i \in J_{s+1}} \theta_i = 1$, $\theta_i > 0$, для $i \in J_{s+1}$. Увеличиваем счетчик внутренних итераций: $s \Rightarrow$ $\Rightarrow s + 1$, и возвращаемся к началу внутреннего цикла.

Замечание. Поскольку $|J_{s+1}| < |J_s|$, то внутренний цикл будет выполняться конечное число раз, обязательно завершившись построением подходящего подсимплекса, в крайнем случае одноэлементного.

Шаг 5. *Конец внутреннего цикла*: увеличиваем счетчик внешних итераций: $k \Rightarrow k + 1$, и возвращаемся к началу внешнего цикла.

Конец основного цикла.

Конец алгоритма.

Как видно из описания, итерация алгоритма начинается подходящим базисом I_k, порождающим соответствующее подходящее аффинное подпространство $H_k = \text{aff}\{x^i, i \in I_k\}$ и подходящий подсимплекс $S_k = \text{co}\{x^i, i \in I_k\}$, а заканчивается построением нового подходящего базиса I_{k+1} с соответствующим аффинным подпространством $H_{k+1} = \text{aff}\{x^i, i \in I_{k+1}\}$ и подходящим подсимплексом $S_{k+1} = \text{co}\{x^i, i \in I_{k+1}\}$.

Далее будет показано, что при этом, МАП, во-первых, сходится за конечное число итераций, а во-вторых, имеет глобально линейную скорость сходимости. Точная формулировка этих утверждений приводится ниже.

4. СХОДИМОСТЬ МЕТОДА АФФИННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

Сходимость МАП и оценка скорости сходимости утверждаются следующей теоремой.

Теорема 1. *Существует* $\bar{k}$ *такое, что*

$$\min_{z \in H_{\bar{k}+1}} \|z\| = \min_{z \in X} \|z\| = \|z^*\|, \quad z^* \in X,$$

и $\rho \in [0, 1)$ *такое, что*

$$\min_{z \in H_{k+1}} \|z\| - \|z^*\| \le \rho\left(\min_{z \in H_k} \|z\| - \|z^*\|\right)$$

для $k = 1, 2, \ldots, \bar{k}$.

Доказательство. Покажем сначала, что итерации внутреннего цикла по крайней мере не увеличивают $\|w^s\|$. Действительно, в (8) имеем $y^s, w^s \in H_s$, $\|y^s\| \le \|w^s\|$, и, в силу выпуклости нормы,

$$\|u(\mu)\|^2 \le \mu\|y^s\|^2 + (1-\mu)\|w^s\|^2 \le \mu\|w^s\|^2 + (1-\mu)\|w^s\|^2 = \|w^s\|^2.$$

Полагая $\mu = \mu_s$, получаем $u(\mu_s) = w^{s+1}$ и, следовательно, $\|w^{s+1}\| \le \|w^s\|$.

Отсюда вытекает, что на выходе из внутреннего цикла, скажем на $\bar{s}$-й итерации справедливо неравенство

$$\|z^{k+1}\| = \min_{z \in H_{k+1}} \|z\| = \|y^{\bar{s}}\| = \|w^{\bar{s}}\| \le \|w^{\bar{s}-1}\| \le \ldots \le \|w^0\| = \|z^k\|, \tag{11}$$

что гарантирует по крайней мере невозрастание последовательности $\|z^k\|$, $k = 0, 1, \ldots, \bar{k}$.

Для доказательства строгого убывания в силу (11) достаточно, чтобы во внутреннем цикле хотя бы для одного $0 \le s < \bar{s}$ выполнялось строгое неравенство $\|w^{s+1}\| < \|w^s\|$. В частности, покажем, что оно выполнено для $s = 0$. Тогда $w^0 = z^k \in \text{ri}\{T_0\}$. Обозначим

$$\delta = \min_{i \in I_k = J_0} \lambda_i > 0$$

в представлении

$$w^0 = \sum_{i \in J_0} \lambda_i x^i.$$

Пусть y^0 – решение задачи (7) для $s = 0$. Тогда верно следующее:

(А) либо y^0 представимо в виде

$$y^0 = \theta x^{i_k} + (1-\theta)h^0 \text{ для некоторых } \theta \ne 1, \quad h^0 \in G_0,$$

(Б) либо

$$y^0 = x^{i_k} + g \text{ для некоторого } g \in L_{G_0} \triangleq L_0,$$

где L_{G_0}, или, иначе, L_0 – линейное подпространство, присоединенное к G_0.

Покажем, что при этом в случае (А) будет $\theta > 0$. Действительно, пусть

$$y^0 = \theta x^{i_k} + (1-\theta)h^0,$$

или

$$0 = \theta(x^{i_k} - y^0) + (1-\theta)(h^0 - y^0).$$

Умножив это равенство на $w^0 - y^0$, получим

$$0 = \theta(x^{i_k} - y^0)(w^0 - y^0) + (1-\theta)(h^0 - y^0)(w^0 - y^0). \tag{12}$$

Заметим, что

$$(x^{i_k} - y^0)(w^0 - y^0) = x^{i_k}(w^0 - y^0),$$

в силу ортогональности y^0, – присоединенному линейному подпространству L_0, что следует из оптимальности y^0 как решения задачи (7). Далее,

$$x^{i_k}(w^0 - y^0) = x^{i_k}w^0 - x^{i_k}y^0 \le \|w^0\|^2 - x^{i_k}y^0$$

по способу выбора x^{i_k} в (6). В свою очередь,

$$\begin{aligned} \|w^0\|^2 - x^{i_k}y^0 &= \|w^0 - y^0\|^2 - x^{i_k}y^0 + 2w^0y^0 - \|y^0\|^2 = \|w^0 - y^0\|^2 - x^{i_k}y^0 + \\ &+ w^0y^0 + w^0y^0 - \|y^0\|^2 = \|w^0 - y^0\|^2 - y^0(x^{i_k} - w^0) + y^0(w^0 - y^0) = \|w^0 - y^0\|^2. \end{aligned} \tag{13}$$

поскольку как $x^{i_k} - w^0$, так и $w^0 - y^0$ принадлежат присоединенному L_0 и, следовательно, ортогональны y^0.

Далее,

$$\begin{aligned} (h^0 - y^0)(w^0 - y^0) &= (h^0 - y^0 + w^0 - w^0)(w^0 - y^0) = \|w^0 - y^0\|^2 + (h^0 - w^0)(w^0 - y^0) = \\ &= \|w^0 - y^0\|^2 + w^0(h^0 - w^0) - y^0(h^0 - y^0) = \|w^0 - y^0\|^2, \end{aligned} \tag{14}$$

поскольку $w^0(h^0 - w^0) = 0$ в силу оптимальности w^0 на H_k, а $y^0(h^0 - y^0) = 0$ в силу уже упоминавшейся оптимальности y^0 на G_0.

Тогда если $\theta < 0$, то в силу (13) и (14) равенство (12) дает

$$0 \ge \theta\|w^0 - y^0\|^2 + (1-\theta)\|w^0 - y^0\|^2 = \|w^0 - y^0\|^2 > 0,$$

что невозможно.

Равенство $\theta = 0$ исключается в силу выбора x^{i_k}. Действительно, если это не так, то $y^0 = h^0$ для некоторого $h^0 \in H_k$ и

$$\|w^0\|^2 \le \|y^0\|^2 = \min_{z \in \operatorname{aff}\{x^{i_k}, H_k\}} \|z\|^2 \le \min_{\lambda \in [0,1]} \|(1-\lambda)w^0 + \lambda x^{i_k}\|^2 = \|(1-\lambda_*)w^0 + \lambda_* x^{i_k}\|^2,$$

где непосредственным подсчетом можно убедиться в том, что

$$\lambda_* = \min\left\{1, \frac{\|w^0\|^2 - x^{i_k}w^0}{\|w^0 - x^{i_k}\|^2}\right\} > 0$$

ввиду (6). При этом $(1-\lambda_*)w^0 + \lambda_* x^{i_k} \neq w^0$ и из строгой выпуклости нормы следует, что

$$\|w^0\|^2 \le \|y^0\|^2 \le \|(1-\lambda_*)w^0 + \lambda_* x^{i_k}\|^2 < \|w^0\|^2,$$

что опять приводит к противоречию.

Заметим, что из $\theta > 0$ следует $\|y^0\| < \|w^0\|$. Пусть, в соответствии с (8)–(10),

$$w^1 = (1-\mu_0)w^0 + \mu_0 y^0,$$

где

$$\mu_0 = \max_{\mu \in [0,1]} \mu : \mu w^0 + (1-\mu)y^0 \in T_0.$$

Так как

$$w^0 = \sum_{i \in I_k} \lambda_i x^i + 0 \cdot x^{i_k}, \quad y^0 = \sum_{i \in I_k} \bar{\lambda}_i x^i + \theta x^{i_k}$$

с $\lambda_i \ge \delta > 0$, $|\bar{\lambda}_i| < \Delta$, $i \in I_k$, $\theta > 0$, то для μ_0 получаем оценку

$$\mu_0 = \min_{\bar{\lambda}_i < 0,\, i \in I_k} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \bar{\lambda}_i} \ge \frac{\delta}{\delta + \Delta} > 0,$$

где Δ – некоторая легко оцениваемая константа. Тогда

$$\|w^1\| \le \mu_0 \|w^0\| + (1-\mu_0)\|w^0\| < \|w^0\|, \tag{15}$$

что и требовалось доказать.

Случай (Б), т.е. $y^0 = x^{i_k} + g$, где $g \in L_0$, существенно проще. Здесь интервал $[x^{i_k}, w^0] \subset T_0$ по построению, а поскольку $w^0 \in \operatorname{ri}\{S_k\} \subset H_k$, то существует $\gamma > 0$ такое, что $w^0 + \gamma g \in S_k \subset T_0$ и, следовательно, $[x^{i_k}, w^0 + \gamma g] \subset T_0$.

Тогда, выбрав $\bar{\mu} = \gamma/(1+\gamma)$, получим

$$\bar{\mu} y^0 + (1-\bar{\mu})w^0 = \bar{\mu}(x^{i_k} + g) + (1-\bar{\mu})w^0 =$$
$$= \frac{\gamma}{1+\gamma}(x^{i_k} + g) + \left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}\right)w^0 = \frac{\gamma}{1+\gamma}x^{i_k} + \frac{1}{1+\gamma}(w^0 + \gamma g) \in T_0$$

и, следовательно,

$$\mu_0 = \max_{\mu \in [0,1]} \mu : (1-\mu)w^0 + \mu y^0 \in T_0 \ge \bar{\mu} > 0$$

откуда, как и ранее, следует (15). При строгом убывании $\|z^{k+1}\| < \|z^k\|$ (следующем в силу (11) из (15)), конечность алгоритма вытекает из конечности числа подходящих подсимплексов X и невозможности повторного обращения к какому-либо из них. Прекращение работы алгоритма в неоптимальной точке также невозможно в силу строгой монотонности при несоблюдении условий оптимальности (3).

Для доказательства геометрической скорости сходимости метода покажем, что $\|y^0\|^2 \le (1-\gamma^2)\|z^k\|^2$ для некоторого $\gamma^2 \in (0, 1]$. Последнее следует из оценок

$$\|y^0\|^2 = \min_{y \in G_0} \|y\|^2 \le \min_{\lambda} \|z^k + \lambda(x^{i_k} - z^k)\|^2 = \|z^k\|^2 + \min_{\lambda}\{2\lambda z^k(x^{i_k} - z^k) + \lambda^2 \|x^{i_k} - z^k\|^2\} =$$
$$= \|z^k\|^2 + \|z^k\| \|x^{i_k} - z^k\| \min_{\lambda}\{\delta\lambda^2 - 2\gamma\lambda\},$$

где

$$\delta = \frac{\|x^{i_k} - z^k\|}{\|z^k\|}, \quad \gamma = \frac{z^k(z^k - x^{i_k})}{\|x^{i_k} - z^k\| \|z^k\|} \in (0, 1].$$

Отсюда

$$\|y^0\| \le \|z^k\|^2 - \|z^k\|\|x^{i_k} - z^k\|\gamma^2/\delta = (1-\gamma^2)\|z^k\|^2.$$

Теперь можно оценить

$$\begin{aligned}\|z^{k+1}\|^2 &= \|z^{k+1} - y^0\|^2 + \|y^0\|^2 \le (1-q)\|z^k - y^0\|^2 + \|y^0\|^2 \le (1-q)\|z^k - y^0\|^2 + (1-q)\|y^0\|^2 + q\|y^0\|^2 = \\ &= (1-q)(\|z^k - y^0\|^2 + \|y^0\|^2) + q\|y^0\|^2 = \\ &= (1-q)\|z^k\|^2 + q\|y^0\|^2 \le (1-q)\|z^k\|^2 + q(1-\gamma^2)\|z^k\|^2 = (1-q\gamma^2)\|z^k\|^2 = \rho^2\|z^k\|^2.\end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда получаем

$$\|z^{k+1}\| - \min_{z \in X}\|z\| = \|z^{k+1}\| - \|z^*\| \le \rho\|z^k\| - \|z^*\| < \rho(\|z^k\| - \|z^*\|), \tag{17}$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что на самом деле полученная оценка скорости сходимости в силу строгого неравенства (17) является "лучшей чем линейная" скоростью убывания разности $\|z^k\| - \|z^*\|$, что подтверждается и вычислительными экспериментами, описанными ниже.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для численных экспериментов с алгоритмом исходный симплекс генерировался случайным образом как набор векторов с компонентами, представляющими независимые, равномерно распределенные случайные величины. Для генерации стресс-тестов использовалось масштабирование, так что последняя координата каждого вектора имела существенно меньший масштаб изменений, чем по остальным измерениям. Точнее говоря, исходный набор данных представлял в каждом тесте совокупность из $n-1$ векторов вида $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ размерности n, компоненты которых ξ_i вычислялись как

$$\xi_i = \begin{cases} \sigma(\zeta_i - 0.5), & i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \sigma^{-1}\zeta_n + \delta, & i = n, \end{cases}$$

где σ – параметр масштабирования, δ – параметр сдвига по n-й координатной оси, а ζ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, – независимые, равномерно распределённые на [0,1] случайные величины.

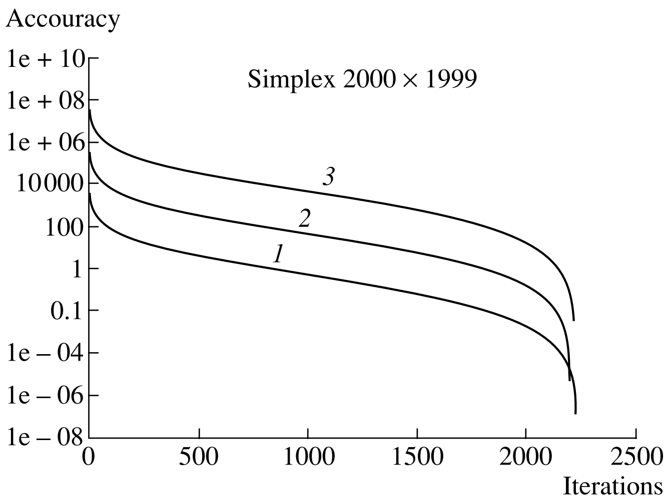
Несмотря на простоту данного теста, он, по-видимому, достаточно труден с точки зрения поиска элемента минимальной нормы. По крайней мере, простейший алгоритм, изложенный в [6], даже для относительно скромной размерности задачи в 100 переменных и 100 вершин симплекса после более чем миллиона итераций смог добиться всего лишь точности порядка 10^{-2} в удовлетворении условий оптимальности.

Алгоритм, изложенный в данной работе, был реализован на языке octave [7], свободно распространяемом матрично-векторном вычислителе, весьма удобном для подобных экспериментов: вся реализация алгоритма занимает около 150 строк кода. Подробнее с программой можно ознакомится по электронному архиву [8], где с использованием технологии "литературного программирования" (literate programming) в деталях описана текущая реализация алгоритма.

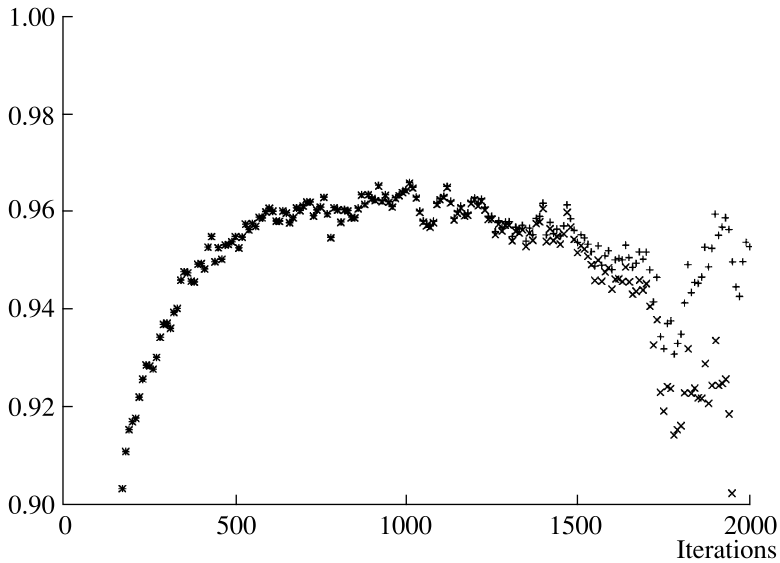
При всем при этом программа является, конечно, лишь проверкой надежности и общей вычислительной эффективности алгоритма в терминах числа итераций, необходимых для получения решения. Особых попыток повысить ее реальную эффективность на данном этапе не производилось; так, в частности, наиболее вычислительноемкая задача – проекция на аффинные подпространства G_s в (7) осуществлялась прямым решением системы необходимых, а в данном случае – и достаточных условий минимума

$$P_s u - \theta e = 0,$$
$$eu = 1,$$

относительно переменных u – коэффициентов разложения проекции нуля на аффинное подпространство G_s по базису этого подпространства и θ – двойственной переменной к условию нормировки этих коэффициентов. Вектор $e = (1, \ldots, 1)$, а матрица P_s – это матрица Грама векторов базиса G_s. Решение условий минимума сводится в основном к обращению P_s, которое в простейшей



Фиг. 1. Кривые: *1* – для $\sigma^2 = 10$, *2* – для $\sigma^2 = 1000$, *3* – для $\sigma^2 = 10000$; параметр сдвига $\delta = 0.001$.



Фиг. 2. Значки: + – для r1, × – для r2.

реализации каждый раз осуществлялось с холодного старта. Здесь, конечно, заключен большой резерв повышения практической эффективности алгоритма: предварительные эксперименты показывают, что можно снизить рост вычислительной (временной) сложности алгоритма с $O(n^{3.5})$, отмеченный в [3], до $O(n^2)$, но это предмет отдельных исследований, поскольку при этом возникает эффект накопления погрешности вычислений.

Характерное поведение алгоритма можно продемонстрировать на достаточно представительном примере минимизации расстояния до симплекса с 1999 вершинами в 2000-мерном пространстве. На фиг. 1 показана (в логарифмическом по оси Oy масштабе) сходимость к нулю разности $\|z^k\| - \|z^*\|$ для различных значений коэффициента масштабирования σ. Хорошо видна геометрическая скорость сходимости на большинстве итераций алгоритма с ускорением как в начале счета, так и в его конце. Можно отметить также замечательную устойчивость параметров геометрической скорости сходимости к масштабированию: при изменении σ^2 на три порядка скорость сходимости практически не изменилась.

На фиг. 2 приведены более детальные данные о параметрах линейной сходимости. Набор данных r1 описывает изменение нормы вектора z^k, которая в соответствии с (16) должна убывать не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем ρ. На фиг. 2 (набор данных r1) представлены соответствующие значения отношений $\|z^{k+1}\|/\|z^k\|$ для основного массива итераций k. Набор данных r2 представляет значения отношений $(\|z^{k+1}\| - \|z^*\|)/(\|z^k\| - \|z^*\|)$ для того же массива данных, и хорошо заметен эффект ускорения сходимости в терминах отклонений от оптимального значения на завершающем этапе вычислений. Значение параметра линейной скорости сходимости порядка 0.95 для такой размерности следует признать достаточно приличным или по крайней мере сравнимым с аналогичными теоретическими оценками для методов типа эллипсоидов или проекционных алгоритмов. Детальное исследование зависимости этого множителя от размерности и параметров задачи все еще предстоит провести.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bauschke H.H., Borwein J.M.* On projection algorithms for solving convex feasibility problems // SIAM Revs. 1996. V. 38. № 3. P. 367–426.
2. *Нурминский Е.А.* Параллельный метод проекции на выпуклую оболочку семейства множеств // Изв. вузов. Математика. 2003. Т. 12. Вып. 499. С. 78–82.
3. *Нурминский Е.А.* Метод последовательных проекций для решения задачи о наименьшем расстоянии для симплексов // Электронный журнал “Исследовано в России”. 2004. Т. 160. С. 1732–1739. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2004/160.pdf.
4. *Брегман Л.М.* Нахождение общей точки выпуклых множеств методом последовательного проектирования // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162. № 3. С. 487–490.
5. *Гурин Л.Г., Поляк Б.Т., Райк Э.В.* Методы проекций для отыскания общей точки выпуклых множеств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7. С. 1211–1228.
6. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
7. GNU Octave, http://www.octave.org
8. *Нурминский Е.А.* Метод аффинных подпространств для поиска вектора минимальной длины в симплексе (PDF). http://www.iacp.dvo.ru/lab– 11/e-prints