Представлено в ЖВМ и МФ 13.12.2007,
окончательная версия — 07.05.2008.

УДК 519.853.3/.32

Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов

Е.А. Нурминский

7 мая 2008 г.

Аннотация

Изучается поведение фейеровских процессов с исчезающим возмущением, порожденным малым сдвигом в аргументе фейеровского оператора. Показано, что в случае локальной сильной фейеровости наличие исчезающей возмущающей добавки не препятствует сходимости к притягивающему множеству. Вместе с тем такой добавкой можно воспользоваться для придания процессу дополнительные свойств и гарантировать сходимость к выделенным подмножествам притягивающего множества. Такая схема позволяет в частности предложить новые параллельные методы декомпозиции экстремальных задач, не требующие наличия специфической структуры ограничений.

Ключевые слова: Фейеровские процессы, задача допустимости, методы проекции, декомпозиция экстремальных задач

Введение

Начиная с основополагающих работ И.И.Еремина [1, 2, 3] понятие фейеровских процессов успешно использовались в многочисленных исследованиях по сходимости итеративных процессов решения систем равенств/неравенств, экстремальных задач и пр. С современным состоянием этого направления можно ознакомится по работам [4, 5]. Предметом рассмотрения данной статьи будет изучение поведения фейеровских процессов с дополнительным малым воздействием, т.е. рекуррентных последовательностей, порождаемых соотношениями вида $x^{s+1} = F(x^s + z^s), \quad s = 0, 1, \ldots$, где F принадлежит одному из подклассов фейеровских операторов, а z^s — некоторое убывающее ($z^s \to 0$ когда $s \to \infty$) дополнительное воздействие. Подразумевается, что дополнительное воздействие z^s определяется текущим состоянием процесса x^s. С одной стороны z^s можно рассматривать как помеху, но с другой стороны наличие этого воздействия позволяет направить фейеровский процесс в желаемую сторону и тем самым добиться дополнительного положительного эффекта.

1 Обозначения и определения

Основные события данной работы будут происходить в конечномерном евклидовом пространстве E со скалярным произведением xy и нормой $\|x\| = \sqrt{xx}$. Отличие от умножения вектора x на скалярный множитель α обычно ясны из контекста. Через $\mathbb{R}$ будем обозначать вещественную ось.

В дальнейшем будут использованы общие условиям сходимости итеративных процессов [9], являющиеся в определенном смысле дискретной версией условий асимптотической устойчивости Ляпунова. В соответствие с этими условиями для того, чтобы у последовательности $\{x^s\}$, порожденной некоторым итеративным процессом, существовала предельная точка, принадлежащая заданному множеству $X_\star$ достаточно выполнения следующих условий:

A1 Последовательность $\{x^s\}$ ограниченна.

A2 Для каждой подпоследовательности $\{x^{n_k}\}$, сходящейся к $x' \notin X_\star$ существует $\epsilon > 0$ такое, что для каждого n_k найдется индекс $m_k > n_k$ такой, что $\|x^{n_k} - x^s\| \leq \epsilon$ для $n_k \leq s < m_k$ и $\|x^{n_k} - x^{m_k}\| > \epsilon$.

A3 Существует непрерывная функция $W(x)$ такая что для всякой подпоследовательности $\{x^{n_k}\}$, сходящейся к $x' \notin X_\star$ и существующей в силу условия A2 соответствующей подпоследовательности $\{x^{m_k}\}$ найдется подпоследовательность $\{p_k\}$ с $n_k < p_k \leq m_k$ такая, что выполняется

$$\limsup_{k\to\infty} W(x^{p_k}) < \liminf_{k\to\infty} W(x^{m_k}).$$

Для того, чтобы каждая предельная точка последовательности $\{x^s\}$ принадлежала $X_\star$ достаточно выполнения двух дополнительный условий:

A4 Если $x^{n_k} \to x^\star \in X_\star$, то $\|x^{n_k+1} - x^{n_k}\| \to 0$.

A5 Множество $W(X_\star) = \{W(x^\star) : x^\star \in X_\star\}$ такое, что $\mathbb{R} \setminus W(X_\star)$ всюду плотно.

Содержательно условие A2 препятствует "застреванию" итеративного процесса $\{x^s\}$ в точках, не принадлежащих $X_\star$. Условие A3 неявным образом запрещает предельные циклы, не проходящие через точки $X_\star$ и является аналогом отрицательности полной производной функции Ляпунова по траектории динамического процесса. Условие A4 предотвращает "отпрыгивание" точек последовательности $\{x^s\}$ от предельного множества $X_\star$, условие A5 в совокупности с A1-A4 фактически гарантирует сходимость $\{W(x^s)\}$, что в сочетании с A3 исключает наличие у $\{x^s\}$ предельных точек, не принадлежащих $X_\star$.

2 Сходимость фейеровских последовательностей с возмущениями

Для целей настоящей работы определим фейеровский оператор относительно некоторого заданного множества V следующим образом.

Определение 1 *Оператор $F : E \to E$ называется фейеровским (относительно заданного множества V), если $F(v) = v$ для $v \in V$ и для всех $x \in E$*

$$\|F(x) - v\| \leq \|x - v\| \tag{1}$$

для всех $v \in V$.

Множество V обычно подразумевается из контекста и далее мы будем предполагать его замкнутость и, в основном для простоты, ограниченность. Дополнительно к данному определению мы будем предполагать непрерывность $F(x)$ на некотором открытом расширении V, т.е. предполагается существование открытого $\tilde{V}$ такого, что $V \subset \tilde{V}$ и $F(x)$ непрерывно на $\tilde{V}$. Поскольку $F(x)$ непрерывно на V по определению, речь идет фактически о непрерывности $F(x)$ на границе V.

С помощью фейеровского оператора F можно построить, начиная с какой-либо исходной точки x^0, итеративный фейеровский процесс $x^{s+1} = F(x^s), s = 0, 1, \ldots$, который может служить моделью некоторого вычислительного алгоритма для определения точки или точек множества V. Свойство (1) , а точнее его различные усиления, гарантируют сходимость в том или ином смысле элементов последовательности $\{x^s\}$ к множеству V.

Имея в виду дальнейшие приложения, мы предположим следующие свойства F, которые также усиливают (1).

Определение 2 *Фейеровский оператор F будем считать локально сильно фейеровским, если для любого $\bar{x} \notin V$ существует окрестность нуля U и число $\alpha \in [0, 1)$ такие, что*

$$\|F(x) - v\| \leq \alpha \|x - v\| \tag{2}$$

для всех $v \in V, x \in \bar{x} + U$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 *Пусть V — замкнуто и ограничено, F —- локально сильно фейеровский, последовательность $\{x^s\}$, полученная с помощью рекуррентных соотношений*

$$x^{s+1} = F(x^s + z^s), s = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

ограничена, $z^s \to 0$ при $s \to \infty$. Тогда для произвольного x^0 все предельные точки $\{x^s\}$ принадлежат множеству V.

Доказательство. Доказательство сходимости будет основано на проверке условия A1-A5 с множеством $X_\star = V$ и функцией Ляпунова $W(x) = \inf_{v \in V} \|x - v\| = \rho(x, V)$. Поскольку A1 выполнено по предположению теоремы, то начнем проверку с условия A2.

Предположим, что существует подпоследовательность x^{n_k}, сходящаяся к $x' \notin V$ с $\rho(x', V) \geq 2\delta > 0$. Выберем окрестность U так, чтобы для $x \in x' + 4U$ выполнялось условие (2) с некоторым $\alpha < 1$ и $\rho(x, V) \geq \delta > 0$. Если предположить, что для всех $s > n_k$ $x^s \in x^{n_k} + U \subset x' + 2U$ то $x^s + z^s \in x' + 4U$ для достаточно больших k и $x^{s+1} = F(x^s + z^s)$ удовлетворяет

$$\|x^{s+1} - v\| = \|F(x^s + z^s) - v\| \leq \alpha\|x^s + z^s - v\| \leq \alpha\|x^s - v\| + q\|z^s\| \leq (1 + \alpha)/2\|x^s - v\| = \beta\|x^s - v\|$$

для всех $v \in V$, где $\beta < 1$, лишь только $\|z^s\| \leq (1 - \alpha)/\alpha\|x^s - v\| = \gamma_s$. Для правой части последнего неравенства есть положительная оценка снизу: $\gamma_s \geq \rho(x^s, V)(1 - q)/q \geq \delta(1 - \alpha)/\alpha > 0$ так что оно выполняется для достаточно больших k.

Итерируя полученное неравенство $\|x^{s+1} - v\| \leq \beta\|x^s - v\|$ по $s = n_k, n_k + 1, \ldots, t - 1$ получим $\|x^t - v\| \leq \beta^{t - n_k}\|x^{n_k} - v\| \to 0$ при $t \to \infty$, что противоречит $\|x^t - v\| \geq \rho(x^t, V) \geq \delta > 0$ поскольку по предположению доказательства $x^t \in x^{n_k} + U \subset x' + 2U$ для всех $t > n_k$.

Полученное противоречие доказывает, что для любого k существует m_k такое, что

$$\|x^t - x^{n_k}\| \leq \epsilon, n_k \leq t < m_k \quad \text{и} \quad \|x^{m_k} - x^{n_k}\| > \epsilon > 0,$$

для некоторого $\epsilon > 0$ такого, что $\|z\| \leq \epsilon$ влечет $z \in U$, что доказывает выполнение условия A2.

Далее соответственно

$$\rho(x^{m_k}, V) \le \beta^{m_k - n_k}\rho(x^{n_k}, V) \le \beta\rho(x^{n_k}, V) \le \rho(x^{n_k}, V) - (1-\beta)\rho(x^{n_k}, V) \le \rho(x^{n_k}, V) - \theta$$

для $\theta = (1-\beta)\rho(x^{n_k}, V) \ge (1-\beta)\delta > 0$, откуда, переходя к пределу

$$\limsup_{k\to\infty} \rho(x^{m_k}, V) \le \liminf_{k\to\infty} \rho(x^{n_k}, V) - \theta < \liminf_{k\to\infty} \rho(x^{n_k}, V),$$

то есть условие А3 также выполнено с $p_k = m_k$.

Легко видеть, что А4 также выполняется. Действительно, пусть $x^{n_k} \to \bar{x} \in V$ и обозначим через v^s решение задачи $\min_{v\in V} \|x^s - v\|$ По построению $\|x^{n_k} - v^{n_k}\| \to 0$ при $k \to \infty$ и в силу ограниченности V и $\|F(x^{n_k} - F(v^{n_k})\| \to 0$. При этом

$$\|x^{n_k+1} - x^{n_k}\| = \|F(x^{n_k}) - x^{n_k}\| = \|F(x^{n_k}) - F(v^{n_k} + v^{n_k} - x^{n_k}\| \le \|F(x^{n_k}) - F(v^{n_k}\| + \|v^{n_k} - x^{n_k}\| \to 0$$

при $k \to \infty$, что доказывает А4. Условие А5 выполнено очевидным образом, поскольку $\rho(v, V) = 0$ для всех $v \in V$. ■

Полученные результаты можно обобщить на случай нестационарной фейеровской последовательности вида

$$x^{s+1} = F_s(x^s + z^s), \quad s = 0, 1, \dots, \tag{4}$$

где F_s выбирается из некоторого конечного семейства фейеровских операторов.

Следствие 1 *Пусть $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ — семейство операторов P_i таких, что для любой $x \notin V$ существует P_i, локально сильно фейеровский в x, $z^s \to 0$ при $s \to \infty$ и $F_s = P_{i_s}$, где P_{i_s} — локально сильно фейеровский в x^s оператор. Тогда, если последовательность $\{x^s\}$ ограничена, все ее предельные точки принадлежат V.*

Доказательство.Доказательство этого следствия буквально повторяет доказательство теоремы 1 с единственной оговоркой, что константа сильной фейеровости для операторов F_s будет иметь оценку $\alpha < 1$ вида

$$\|F_s(x) - v\| = \|P_{i_s}(x) - v\| \le \max_{i\in I(x)} \alpha_i \|x - v\| \le \max_{z\in x'+4U} \max_{i\in I(z)} \alpha_i \|x - v\| = \alpha\|x - v\|,$$

где $I(x)$ — множество таких i, что P_i является локально сильно фейеровским в x с константой $\alpha_i < 1$, $i_s \in I(x)$. Везде выше $x \in x' + 4U$, где x' — предельная точка последовательности $\{x^s\}$, выбираемая для проверки условий А2-А3, а U — достаточно малая окрестность нуля. ■

Приведенная теорема показывает, что при достаточно щадящих условиях исчезающая помеха не препятствует основному результату теории фейеровских процессов — сходимости к некоторому множеству неподвижных точек. Далее мы покажем, что используя малые дополнительные воздействия можно добиться сходимости процесса (3)-(4) и к определенным подмножествам V.

Введем понятие ограниченного аттрактанта, как векторного поля, такого, что внутри V оно, содержательно говоря, направлено в сторону некоторого подмножества V.

Определение 3 *Точечно-множественное отображение $\Phi : V \to E$ называется ограниченным аттрактантом $Z \subset V$ если $g(z - x) \ge 0$ для всех $x \in V \setminus Z, g \in \Phi(x)$ и $z \in Z$.*

На самом деле для обоснования желаемой сходимости необходимо несколько более сильное свойство.

Определение 4 *Аттрактант Φ называется сильным ограниченным аттрактантом Z если для любого $x' \in V \setminus Z$ существует окрестность нуля U такая, что*

$$g(z-x) \geq \delta > 0$$

для всех $z \in Z, x \in x' + U, g \in \Phi(x)$ и некоторого $\delta > 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2 *Пусть F — локально сильно фейеровский оператор, Φ — ограниченный сильный аттрактант $Z \subset V$, полунепрерывный сверху на некотором открытом $\tilde{V} \supset V$ и последовательность $\{x^s\}$, построена по правилу*

$$x^{s+1} = F(x^s + \lambda_s \Phi(x^s)), \tag{5}$$

где начальное состояние x^0 произвольно, $\lambda_s \to +0, \sum \lambda_s = \infty$. Тогда, если $\{x^s\}$ ограничена, то любая предельная точка $\{x^s\}$ принадлежит Z.

Доказательство.. Для доказательства теоремы применим те же условия A1-A5 с функцией Ляпунова $W(x) = \inf_{v \in Z} \|x - v\|$.

Проверим выполнение условия A2. Пусть $x' \notin Z$ некоторая предельная точка последовательности $\{x^s\}$. В силу теоремы 1 по крайней мере $x' \in V$. В соответствии с определением 4 существует окрестность нуля U такая, что $g(z-x) \geq \delta > 0$ для всех $z \in Z, x \in x' + 4U$. По полунепрерывности сверху $\Phi(\cdot)$ можно также считать, что $\|g\| \leq C < \infty$ для всех $g \in \Phi(x), x \in x' + 4U$. Если подпоследовательность $\{n^{n_k}\} \to x'$ при $k \to \infty$, то $x^{n_k} \in x' + U$ для достаточно больших k и если для всех $s > n_k x^s \in x^{n_k} + U$, то $x^s \in x' + 2U$ и $x^s + z^s \in x' + 4U$ в силу малости z^s. Тогда для $v \in Z$ и $\bar{x}^{s+1} = x^s + \lambda_s g^s$, где $g^s = \Phi(x^s)$, выполнены условия

$$\|x^{s+1} - z\|^2 \leq \|x^s + \lambda_s g^s - z\|^2 = \|x^s - z\|^2 + \lambda_s^2 \|g^s\|^2 - 2\lambda_s g^s(z - x^s) \leq \|x^s - z\|^2 - \theta\lambda_s$$

при достаточно больших s и некоторого $\theta > 0$. Отсюда следует, что $\|\bar{x}^{s+1} - z\| \leq \|x^s - z\| - \gamma\lambda_s$ для некоторого $\gamma > 0$. Из локальной сильной фейеровости

$$\|x^{s+1} - z\| = \|F(\bar{x}^{s+1}) - z\| \leq q\|\bar{x}^{s+1} - z\| \leq q\|x^s - z\| - q\gamma\lambda_s \leq \|x^s - z\| - \gamma'\lambda_s$$

где $\gamma' > 0$. Вычисляя инфинумы получим

$$W(x^{s+1}) \leq W(x^s) - \gamma'\lambda_s. \tag{6}$$

а суммируя последнее неравенство по s получаем $W(x^s) \to -\infty$, что невозможно.

Следовательно, существует $m_k > n_k$ такое, что для некоторого $\epsilon > 0$, такого, что $\|u\| \leq \epsilon$ влечет $u \in U$

$$\|x^{m_k} - x^{n_k}\| > \epsilon, \|x^s - x^{n_k}\| \leq \epsilon, n_k \leq s < m_k,$$

что доказывает выполнение условия A2. Далее для $n_k \leq s < m_k$ выполнено (6) и, следовательно, суммируя, получаем

$$W(x^{m_k}) \leq W(x^{n_k}) - \gamma' \sum_{s=n_k}^{m_k - 1} \lambda_s.$$

Сумма $\sum_{s=n_k}^{m_k-1} \lambda_s$ легко оценивается снизу:

$$\epsilon < \|x^{m_k} - x^{n_k}\| \leq \sum_{s=n_k}^{m_k-1} \lambda_s \|g^s\| \leq C \sum_{s=n_k}^{m_k-1} \lambda_s,$$

что дает $\sum_{s=n_k}^{m_k-1} \lambda_s \geq \epsilon/C$ и, следовательно,

$$W(x^{m_k}) \leq W(x^{n_k}) - \gamma'\epsilon/C.$$

Переходя к пределу по $k \to \infty$ получаем

$$\limsup_{k\to\infty} W(x^{m_k}) < \liminf_{k\to\infty} W(x^{n_k}),$$

что доказывает выполнение условия A3 с $p_k = m_k$. Поскольку A4-A5 выполнены очевидным образом, то это завершает доказательство теоремы. ■

В теоремах 1-2 использовалось на первый взгляд весьма ограничительное и трудно проверяемое глобальное условие ограниченности последовательности $\{x^s\}$. Однако основную алгоритмическую схему (3) легко модифицировать с помощью некоторых ретрактов $R : E \to \tilde{V}$, возвращающих, в случае ограниченного V, процесс $\{x^s\}$ в некоторое ограниченное множество $\tilde{V}$, такое, что $V + U \subset \tilde{V}$.

$$x^{s+1} = \tilde{F}(x^s + z^s) = \begin{cases} F(x^s + z^s) & x^s \in \tilde{W} \supset \tilde{V} \\ R(x^s) = y^s \in \tilde{V} & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{7}$$

где y^s выбирается в $\tilde{V}$ произвольно. Легко показать, что для локально сильно фейерового F процесс $\{x^s\}$ лишь конечное число раз выйдет за пределы $\tilde{W}$ и ограниченность $\{x^s\}$ будет обеспечена. Также имеет место и и непрерывность $\tilde{F}$ на $\tilde{W}$. В остальном теория процессов вида (7) также покрывается теоремой 2.

Также как и для теоремы 1 справедливо

Следствие 2 *Пусть F_s — локально сильно фейеровский в точке x^s оператор, выбираемый из конечного семейства $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ непрерывных операторов P_i таких, что $P_i(v) = v, i = 1, 2, \ldots, m$ для всех $v \in V$ и для любой $x \notin V$ существует P_i, локально сильно фейеровский в x, $z^s \to 0$ при $s \to \infty$, Φ — ограниченный сильный аттрактант $Z \subset V$, полунепрерывный сверху на некотором открытом $\tilde{V} \supset V$ и последовательность $\{x^s\}$ построена по правилу*

$$x^{s+1} = F_s(x^s + \lambda_s \Phi(x^s)), \tag{8}$$

где начальное состояние x^0 произвольно, $\lambda_s \to +0, \sum \lambda_s = \infty$. Тогда, если $\{x^s\}$ ограничена, то любая предельная точка $\{x^s\}$ принадлежит Z.

Справедливость этого утверждения следует из следствия 2 и равномерной непрерывности конечного семейства $\mathcal{F}$ непрерывных операторов $P_i, i = 1, 2, \ldots, m$.

3 Применение — метод проекций градиента с декомпозицией системы ограничений

Практическая польза от полученных результатов заключается с одной стороны в возможности использовать широкий спектр фейеровских операторов для решения проблемы допустимости, т.е. в гарантии того, что предельные точки построенной последовательности $\{x^s\}$ принадлежат допустимому множеству V. С другой стороны полученный в работе результат позволяет использовать и различные способы улучшения допустимой точки, приближающие ее к множеству Z выделенных в V точек. В качестве таковых могут рассматриваться, например, точки, являющиеся решением экстремальной или иной задачи на допустимом множестве V и здесь также существует большой репертуар определения, скажем, релаксационных направлений, приближающих текущую допустимую точку к множеству решений.

Суть теоремы 2 заключается в том, что при соблюдении ее условий можно достаточно свободно комбинировать схемы получения допустимых точек и алгоритмы достижения выделенного подмножества.

Далее мы рассмотрим важный специальный случай, когда допустимое множество V представимо в виде пересечения семейства множеств $V_\tau, \tau \in T$, то есть $V = \cap_{\tau \in T} V_\tau$. При конечном $T = \{1, 2, \ldots, N\}$ для поиска допустимой точки $v \in V$, т.е. для решения так называемой CFP (Convex Feasibility Problem), было предложено большое количество алгоритмов фейеровского типа, многие из которых могут быть описаны оператором вида

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} w_i((1 - \lambda_i)I + \lambda_i \Pi_i(x)), \tag{9}$$

где Π_i — оператор проекции на соответствующее V_i, I — единичный оператор, $\lambda_i \in [0, 2]$ — параметры релаксации, $(w_i, i = 1, 2, \ldots, N) = w \in \Delta_N$ — веса проекций. Через Δ_N обозначен стандартный N-мерный симплекс: $\Delta_N = \{w_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, N; \sum_{i=1}^N w_i = 1\}$..

Применение таких операторов позволяет использовать структуру различных V_i, операции проекции на которые могут выполняться существенно проще, чем на V, поскольку индивидуальные проекции Π_i можно вычислять независимо друг от друга, то можно использовать параллельные вычисления и т.п.

В работе [6] приведена определенная общая теория сходимости процессов фейеровского типа, использующих подобные операторы. Основной результат этой теории заключается в том, что предельные точки последовательности $\{x^s\}$, порожденной рекуррентным правилом вида $x^{s+1} = F(x^s), s \to \infty$, при различных разумных стратегиях выбора λ_i и w_i принадлежат V. В некоторых достаточно специальных случаях удается показать, что $x^s \to \Pi_V(x^0)$ — проекции начальной точки x^0 на V, способы более тонкой настройки отсутствуют.

Для простоты мы рассмотрим оператор F_s вида (9), где при каждом s лишь один весовой коэффициент w_i отличен от нуля, а все коэффициенты релаксации λ_i равны единице. Покажем, что если $x^s \notin V_i$ для некоторого $i = i_s$, то $F_s = \Pi_{i_s}$ является локально сильно фейеровским в x^s. Это утверждение можно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 1 *Пусть V - выпуклое замкнутое ограниченное множество и W — его выпуклое замкнутое супермножество ($V \subset W$). Тогда при $x \notin W$ оператор проекции $\Pi_W(x)$, определяемый соотношениями:*

$$\Pi_W(x) \in W, \|\Pi_W(x) - x\| = \min_{w \in W} \|w - x\|$$

является локально сильно фейеровским относительно V.

Доказательство.Зафиксируем $x \notin W$ и выберем достаточно малую окрестность нуля U такую, что $(x + 2U) \cap W = \emptyset$ и $\|\Pi_W(z)\| \leq 2\|\Pi_W(x)\| = C/2$ для $z \in x + 2U$. Тогда для $z \in x + U$ и произвольном $v \in V$

$$\frac{\|\Pi_W(z) - v\|^2}{\|z - v\|^2} \leq \frac{\|\Pi_W(z) - v\|^2}{\|z - \Pi_W(z)\|^2 + \|\Pi_W(z) - v\|^2} \leq$$
$$1 - \frac{\|z - \Pi_W(z)\|^2}{\|z - \Pi_W(z)\|^2 + 2(\|\Pi_W(z)\|^2 + \|v\|^2)} \leq 1 - \frac{\|z - \Pi_W(z)\|^2}{\|z - \Pi_W(z)\|^2 + 2(C^2/4 + R^2)}$$
$$\leq 1 - \frac{\min_{z \in x+U} \|z - \Pi_W(z)\|^2}{\max_{z \in x+U} \|z - \Pi_W(z)\|^2 + 2(C^2/4 + R^2)} = 1 - \theta^2 \leq \gamma^2 < 1,$$

где $R \geq \|v\|$ для всех $v \in V$. Отсюда $\|\Pi_W(z) - v\| \leq \gamma\|z - v\|$ для всех $z \in x + U$ и $\gamma < 1$, что и требовалось доказать. ■

В силу следствия 2 отсюда немедленно получаем, что оператор F_s, построенный по принципу выбора в точке x^s оператора $F_s = \Pi_{i_s}$ с $x^s \notin V_{i_s}$ гарантирует сходимость метода простого итерирования $x^{s+1} = F_s(x^s)$ решения CFP. Заметим, что способ выбора множества V_{i_s} не имеет никакого значения, поэтому с точки зрения теории сходимости практически все по-строчные или сингулярные (row-action [10]) методы — циклической проекции, проектирования на самое удаленное множество, перемежающиеся (intermittent), максимальной невязки и пр., покрываются одним утверждением 2.

Однако Следствие 2 дает возможность добиться и дополнительного эффекта за счет аттрактанта $\Phi(x)$ и в качестве примера рассмотрим выпуклую задачу математического программирования

$$f_\star = \min_{x \in V} f(x) = f(x^\star), x^\star \in Z \subset V, \tag{10}$$

где выпуклое замкнутое ограниченное допустимое множество V представлено как пересечение семейства выпуклых замкнутых супермножеств $V_i, i = 1, 2 \ldots, N$: $V = \cap_{i=1,2\ldots,N} V_i$. Для того, чтобы направить итеративный процесс (8) к множеству решений оптимизационной задачи (10) достаточно использовать специальный тип возмущений $z^s = -\lambda_s g^s$ где $g^s \in \Phi(x^s) = \partial f(x^s)$ — субградиент целевой функции задачи (10), произвольно выбираемый из субдифференциального множества $\partial f(x^s)$, шаговый множитель $\lambda_s \to +0$.

В силу неравенства $0 \leq f(x) - f_\star \leq g(x - z)$ для $g \in \partial f(x), x \in V \cap Z$ отображение $\partial f(\cdot)$ является полунепрерывным сверху ограниченным аттрактантом для Z.

Из следствия 2 теоремы 2 при этом следует сходимость различных вариантов метода перемежающихся проекций градиента на элементы декомпозиции допустимого множества V:

$$x^{s+1} = \Pi_s(x^s - \lambda_s g^s), s = 0, 1, \ldots$$

где Π_s -оператор проекции на множество V_{i_s} такое, что $x^s \notin V_{i_s}$, $g^s \in \partial f(x^s)$, f — конечная выпуклая функция, $\lambda_s \to +0, \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s = \infty$.

Используя лемму 1 можно показать и локально сильную фейеровость оператора

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} w_i \Pi_i(x), \tag{11}$$

где Π_i — проекция на супермножество V_i, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_N) \in \Delta_N$.

Лемма 2 *Пусть для оператора F, заданного соотношением (11) имеет место $\sum_{i: x \notin V_i} w_i \geq \gamma > 0$. Тогда $F(x)$ в точке x является локально сильно фейеровским.*

Доказательство.Зафиксируем точку $\bar{x} \notin V$ и обозначим $I(\bar{x}) = \{i : \|\Pi_i(\bar{x}) - \bar{x}\| > 0\}$. По построению каждый из $\Pi_i, i \in I(\bar{x})$ является локально сильно фейеровским в $\bar{x}$ с некоторой константой $\alpha_i \leq \alpha < 1$. Можно выбрать окрестность нуля U так, что для некоторой $\delta > 0$ и $\epsilon > 0$ для всех $x \in \bar{x} + U$ выполнялись неравенства

$$\|\Pi_i(x) - x\| \geq \delta > 0, i \in I(\bar{x}) \text{ и } \|\Pi_i(x) - x\| \leq \epsilon, i \notin I(\bar{x}),$$

где $\epsilon < \gamma(1 - \alpha)\delta/2$.

Пусть $v \in V$ и $x \in \bar{x} + U$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|F(x) - v\| = \|\sum_{i=1}^{N} w_i(\Pi_i(x) - v)\| \leq \|\sum_{i \in I(\bar{x})} w_i(\Pi_i(x) - v)\| + \|\sum_{i \notin I(\bar{x})} w_i(\Pi_i(x) - v)\| \leq \\
\alpha\gamma\|x - v\| + \|\sum_{i \notin I(\bar{x})} w_i(\Pi_i(x) - x) + \sum_{i \notin I(\bar{x})} w_i(x - v)\| \leq \\
\alpha\gamma\|x - v\| + \|\sum_{i \notin I(\bar{x})} w_i(\Pi_i(x) - x)\| + (1 - \gamma)\|x - v\| \leq \\
(\alpha\gamma + 1 - \gamma)\|x - v\| + (1 - \gamma)\epsilon = \bar{\alpha}\|x - v\| + (1 - \gamma)\epsilon,
\end{aligned}$$

где $\bar{\alpha} = 1 - \gamma(1-\alpha) < 1$.

Последнее слагаемое можно также оценить сверху

$$(1-\gamma)\epsilon \leq (1-\gamma)\frac{\epsilon}{\min\limits_{v\in V}\|x-v\|}\|x-v\| \leq (1-\gamma)\frac{\epsilon}{\delta}\|x-v\|.$$

Подставляя эту оценку в неравенство, полученные выше, получаем

$$\|F(x)-v\| \leq \bar{\alpha}\|x-v\| + (1-\gamma)\frac{\epsilon}{\delta}\|x-v\| \leq \frac{1+\bar{\alpha}}{2}\|x-v\| \leq \beta\|x-v\|,$$

где $\beta < 1$, что и требовалось доказать. ■

Полученный результат позволяет обосновать использование для решения задачи (10) и параллельной версии декомпозиционного метода проекций градиента с фейеровским оператором вида (11):

$$x^{s+1} = \sum_{i=1}^{N} w_i^s \Pi_i(x^s - \lambda_s g^s)$$

где операции проектирования могут выполняться параллельно. Условия леммы 2 на веса w_i^s выполняются, например, в том случае, когда они все равномерно отделены от нуля $w_i^s \geq \epsilon > 0$. Для шаговых множителей λ_s соответственно достаточно выполнения традиционных для негладких градиентных схем условий $\lambda_s \to +0, \sum_{s=0}^{\infty}\lambda_s = \infty$, хотя это и приводит к довольно медленной сходимости.

Работа выполнена в рамках проекта ДВО РАН 06-III-А-01-459 и частично поддержана грантом НШ-2810.2008.1.

Список литературы

[1] Еремин И.И. Обобщение релаксационного метода Моцкина-Агмона // Успехи матем. наук, 1965, Т. 20, вып. 2. С. 183-187.

[2] Еремин И.И. О некоторых итерационных методах в выпуклом программировании // Экономика и математические методы, 1966, Т. 2, 6. С. 870-886.

[3] Еремин И.И. Методы фейеровских приближений в выпуклом программировании Матем. заметки, 1968, т.3, вып. 2.

[4] Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 2005. С. 210.

[5] Bauschke H.H., Borwein J.M. On projection algorithms for solving convex feasibility problems // SIAM Revs. 1996. V. 38 №3, P. 367-426.

[6] Flam S. D., Zowe J. Relaxed outer projections, weighted averages and convex feasibilities, BIT, 30 (1990), pp. 289-300.

[7] Motzkin T.S., Schoenberg J.J. The relaxation method for linear inequalities // Canad. J. Math. 1954. Vol. 6, No. 3, pp. 393-404.

[8] Agmon S. The relaxation method for linear inequalities // Canad. J. Math. 1954. Vol. 6, No. 3, pp. 383-392.

[9] Нурминский Е.А. Численные методы выпуклой оптимизации М.: Наука.- 1991.-168 с.

[10] Censor Y. Row-action methods for huge and sparse systems and their applications // SIAM Revs., Vol. 23, 1988. pp. 444-466.