ПОЛИЭДРЫ, НЕЗАВИСИМЫЕ МНОЖЕСТВА
И ГИГАБАЙТНОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Е.А. Нурминский, Н.Б. Шамрай

Всеобщая компьютеризация бизнес-процессов породила огромные объемы данных, предоставляющие большие потенциальные возможности для построения очень детальных экономическо-математических моделей. Тем не менее лишь небольшая часть этих данных используется в целях принятия управляющих решений, на что есть множество технических, организационных и других причин.

Одна из этих причин имеет непосредственное отношение к тематике конференции и заключается в сложностях работы с решением сверх-больших экономико-математических моделей. По сути дела в практических терминах даже отработанная методология линейного программирования для задач порядка 10^7 переменных, 10^6 ограничений представляет существенную проблему, выделяемую в класс huge-scale линейного программирования [1,2]. За отсутствием устоявшегося русского термина будем называть это направление ГЛП — гигабайтное линейное программирование, что, как представляется, и количественно отражает характерные размеры оптимизационных задач, в пределах возможностей современной массовой вычислительной техники серверного калибра.

Источником таких задач является, например, многоиндексные транспортно-логистические проблемы, модели дорожного движения в крупных городах, многопродуктовые динамические производственные модели, проблемы маршрутизации телекоммуникационного трафика и пр. Большую известность приобрела, например, проблема ранжирования интернет страниц (Google problem), хотя и не рекордная по своему объему. Результаты, представленные в докладе, мотивированы в основном задачами моделирования городского трафика, однако к таким задачам проявлен значительный интерес и со стороны транспортно-логистического бизнеса. Как оказалась, работа с практическими моделями позволила обратить внимание на некоторые особенности ГЛП, apriori неочевидные. С математической точки зрения мы рассматриваем классическое линейное программирование вида

$$\min_{Ax \leq b, x \geq 0} cx = \min_{x \in X} cx = cx^\star \tag{1}$$

с той особенностью, что $\dim(x) \sim 10^7$ и количество ограничений (строк матрицы A имеет порядок 10^{5}–10^6. Второй особенностью задач такого масштаба является их высокая разреженность порядка 10^{-5}–10^{-6}, что собственно говоря и имеет решающее значение в попытках решить такие задачи. Плотные матрицы с количеством элементов порядка 10^{13} (ок. 100 Tb) пока еще за пределами возможностей современной вычислительной техники.

Разреженность может иметь структурированную форму (блочная диагональная, обобщенные верхние границы, сетевая структура и др.), что иногда позволяет создавать специализированные алгоритмы для задач большой размерности. Однако для сложных комплексных задач ГЛП определенная структура размывается и рассчитывать на какие-либо специализированные алгоритмы не приходится. Косвенным свидетельством этому являются рис. 1 где приведено распределение количества ненулевых элементов в строках ограничений в типовой задаче транспортно-логистического

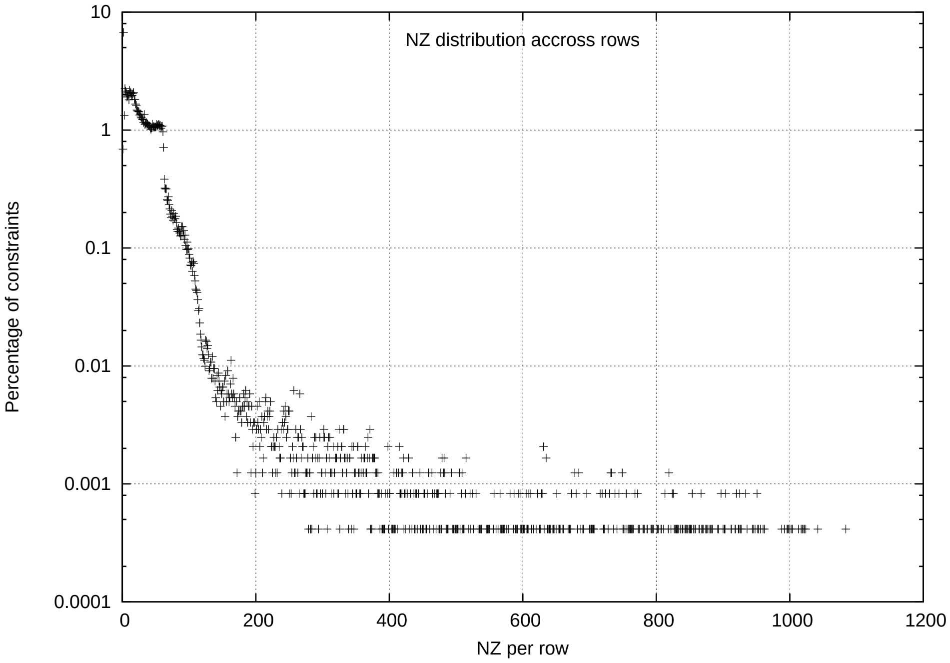

Рис. 1: Распределение ненулевых элементов по строкам

типа гигабайтного масштаба. Распределение ненулевых элементов достаточно размытое и соответствует скорее разреженным scale-free стохастическим графам. В связи с этим в докладе описаны описан подход основанный на достаточно универсальных алгоритмах проективного типа, использующих неструктурированную разреженность и вытекающую из ней возможности декомпозиции.

Теоретическую основу для проективного подхода к решению задачи (1) представляет ее сведение к решению проективного уравнения

$$x = \Pi_X(x - \theta c), \tag{2}$$

где Π_X — оператор ортогональной проекции на множество $X = \{x : Ax \leq b,\}$ константа $\theta > 0$. Привлекательность этого подхода заключается в том, что для достаточно большого θ достаточно однократного вычисления проективного оператора:

$$x^\star = \Pi_X(x^0 - \theta c) \tag{3}$$

для произвольного x^0. Константа θ зависит, конечно, от начальной точки x^0. Вычислению проекций на выпуклые многогранники посвещено множество работ, с которыми можно ознакомиться по более или менее современному, хотя уже и постепенно устаревающему обзору [3]. Интерес к проективным алгоритмам для решения задачи (1) связан еще со следующими обстоятельствами:

1. Универсальность. Эти алгоритмы с одной стороны слабо привязаны к структуре задачи, а с другой стороны при случае дают возможность ее эффективно использовать.

2. Простота вычислительных операций. Проективные алгоритмы опираются на хорошо разработанный аппарат вычислительной линейной алгебры.

Таблица 1: Проекция на политопы, порожденные подмножествами структурно ортогональных строк ограничений прикладной задачи. Столбцы таблицы : m — количество векторов, n — размерность векторов, ρ — плотность ненулевых элементов, t — среднее время на 1 итерацию проектора, $iter$ — среднее количество итераций.

m	n	ρ	t	$iter$
3956	276657	$2.528\,10^{-4}$	1.3044	8.80
4648	219989	$2.151\,10^{-4}$	0.4220	8.40
5585	373285	$1.791\,10^{-4}$	2.0746	9.00
8104	367590	$1.234\,10^{-4}$	0.8558	9.30
12191	818397	$8.203\,10^{-5}$	6.5938	10.10
13426	791975	$7.448\,10^{-5}$	5.3685	10.40
23884	1472946	$4.187\,10^{-5}$	5.3756	10.60
30639	1687920	$3.264\,10^{-5}$	6.5454	11.10

3. Достаточно большой потенциал параллелизации, хотя и по поводу эффективности их применения имеются и различные мнения [4,5].

Представленный в работе подход основан на сведении задачи проекции (3) к проекции на политопы [6], которая также имеет значительный набор эффективных алгоритмов, начиная от работ [7,8] и заканчивая очень быстрым алгоритмом проектирования на симплексоподобные многогранники [9]. В разреженных матрицах можно достаточно эффективно выделять симплексо-подобные подмножества ограничений, что с теоретико-графовой точки зрения сводиться к задачам декомпозиции графа на независимые подмножества. Такая задача, хотя и является NP-сложной, но на практике жадные эвристики типа [10], оказываются вполне удовлетворительными.

В табл. приведены усредненные данные при 10-кратном проектировании случайных точек на политопы, порожденные подмножествами структурно ортогональных строк ограничений прикладной задачи размерностью $130641 \times 3349864 \times 13929381$ (ограничений, переменных, ненулевых элементов). с плотностью ненулевых элементов $3.183\,10^{-5}$.

При разложении исходной задачи на проектирование на независимые множества возникает вопрос о координации полученных решений. Перспективным направлением при этом представляется использование процесса [11] который основан на раздельном проектировании на независимые множества с последующей координацией получаемых решений, также основанной на проективной задаче. На рис. 2 представлена работа координационного алгоритма, где достаточно уверенно можно говорить о его линейной скорости сходимости. В данном случае решалась задача 130640x3349864x13929381 и по оси Оу отложена относительная точность получаемого приближения для вектора минимальной длины. На левом графике приведена (в логарифмической шкале) относительная точность, а а на правом – ее аппроксимация линейной зависимостью от числа итераций. Полученные данные позволяют предположить, что при числе циклов порядка 100 будет достигнута достаточно приемлемая относительная точность порядка 10^{-4}.

Представленные в работе результаты хотя и обнадеживают, но все же имеют предварительный характер и предстоит решить множество различных проблем до того, как можно будет говорить о полной практической применимости этого класса алго-

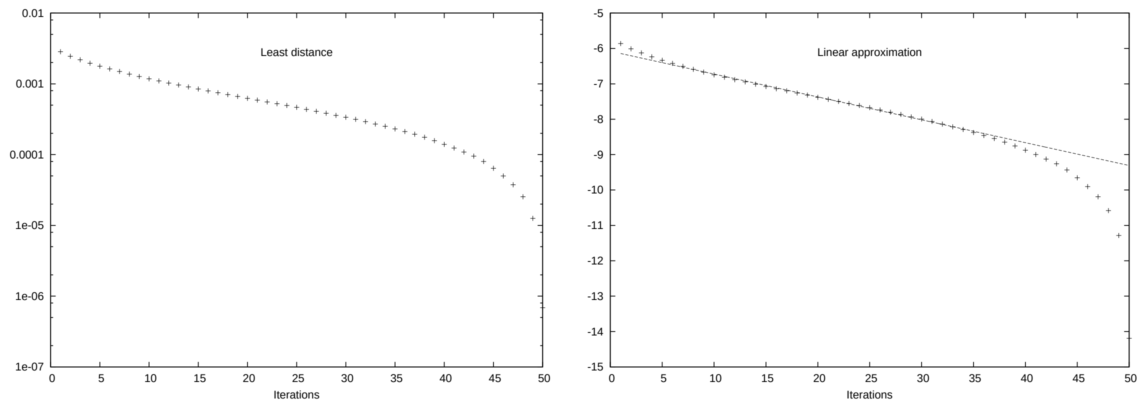

Рис. 2: Работа координационного алгоритма

ритмов. Вместе со стороны промышленности определенно наблюдается заинтересованность в такого сорта разработках и нашей задачей является поиск адекватного ответа на этот вызов.

Работа частично поддержана проектами ДВО РАН 12-I-П18-04 (Программа Президиума РАН N 18), "Проективные алгоритмы и программное обеспечение для решения сверхбольших экстремальных и равновесных задач транспортного моделирования" , 12-III-А-01И-014 "Алгоритмы и программное обеспечение для решения полиэдральных выпуклых проективных задач".

ЛИТЕРАТУРА

1. Nesterov Yu. Efficiency of coordinate descent methods on huge-scale optimization problems CORE Discussion paper, 2010/2, 2010, 23 pp.

2. Nesterov Yu. Subgradient methods for huge-scale optimization problems CORE Discussion paper, 2012/02, 2012, 21 pp.

3. Bauschke, H.H., Borwein, J.M. On projection algorithms for solving convex feasibility problems. SIAM Rev. 38, 367-426 (1996)

4. Gould, N.I.M.: How good are projection methods for convex feasibility problems? Computational Optimization and Applications, 40, 1-12 (2008)

5. Y. Censor, W. Chen, P.L. Combettes, R. Davidi and G.T. Herman On the effectiveness of projection methods for convex feasibility problems with linear inequality constraints Computational Optimization and Applications, Vol. 51, pp. 1065-1088, (2012)

6. Нурминский Е.А. Проекция на внешне заданные полиэдры // Журн. вычисл. матем. и матем. физики .- 2008, т. 48, вып. 3, С. 387-396.

7. Hohenbalken von Balder A finite algorithm to maximize certain pseudoconcave functions on polytopes Mathematical Programming, Vol. 8, 1975, pp. 189-206.

8. Wolfe P. Finding the Nearest Point in a Polytope Mathematical Programming, Vol. 11, 1976, pp 128–149.

9. Michelot C., A finite algorithm for finding the projection of a point onto the canonical simplex of R^n // J.Opt. Theory and Appl., v. 50, no. 1, 1986. 195–200.

10. Halldorsson, M. M., Radhakrishnan, J. Greed is good: Approximating independent sets in sparse and bounded-degree graphs, (1997), Algorithmica 18 (1): 145–163.

11. Нурминский Е.А. Параллельный метод проекции на выпуклую оболочку семейства множеств // Известия вузов, 2003, 11(499) .- С. 78-82.

12. Нурминский Е.А. Метод подходящих аффинных подпространств для решения задачи проекции на симплекс // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 2005 .- т. 45 .- вып. 11 .- С. 1996-2004.

Нурминский Евгений Алексеевич,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Дальневосточный федеральный университет
ул. Радио 5, Владивосток, 696041, Россия, тел. (423) 213-04-04, факс (423) 231-04-52.
E-mail: nurmi@dvo.ru
Шамрай Наталья Борисовна,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Дальневосточный федеральный университет
ул. Радио 5, Владивосток, 696041, Россия, тел. (423) 213-04-04, факс (423) 231-04-52.
E-mail: shamray@dvo.ru