

# Математическое моделирование транспортных сетей

Лаборатория суперкомпьютерных и распределенных  
вычислительных технологий ИАПУ ДВО РАН  
Нурминский Е.А.  
nurmi@dvo.ru

Президиум ДВО РАН, 31 января 2012

# Что и зачем исследуем?

Объект исследования:

Транспортные потоки в крупных городах.

Задачи:

- Прогнозирование загрузки элементов транспортной инфраструктуры города.
- Определение транспортных расходов участников движения.
- Управление транспортными потоками.

# Автомобильная статистика России (2008)

N	Город	Авт/1000	Население (тыс. чел.)	Авт (тыс)
1.	Владивосток	566	581	328.85
2.	Красноярск	384	927	355.97
3.	Сургут	377	290	109.33
4.	Тюмень	374	550	205.70
5.	Краснодар	350	709	248.15
6.	Москва	338	11000	3718.00
7.	Пенза	297	509	151.17
8.	Екатеринбург	290	1364	395.56
9.	Тверь	288	409	117.79
10.	Ставрополь	285	450	128.25

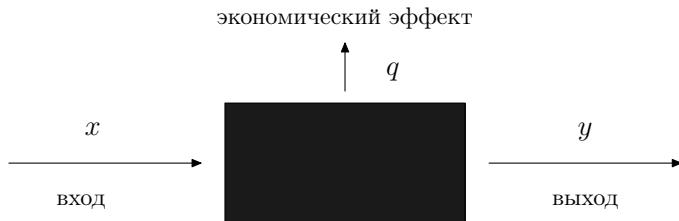
Интернет источник: <http://www.autonews.ru/autobusiness>, новостное сообщение от 24.09.2008 г.

# Автомобильная статистика России (2008)

N	Город	Авт/1000	Население (тыс. чел.)	Авт (тыс)
1.	Владивосток	566	581	328.85
2.	Красноярск	384	927	355.97
3.	Сургут	377	290	109.33
4.	Тюмень	374	550	205.70
5.	Краснодар	350	709	248.15
6.	Москва	338	11000	3718.00
7.	Пенза	297	509	151.17
8.	Екатеринбург	290	1364	395.56
9.	Тверь	288	409	117.79
10.	Ставрополь	285	450	128.25

Интернет источник: <http://www.autonews.ru/autobusiness>, новостное сообщение от 24.09.2008 г.

# Экономический подход: затраты-выпуск



- $x$  – усилия, предпринятые для перевозки, нагрузка на транспортную систему;
- $y$  – объем грузов или количество людей, перевезенные системой;
- $q$  – социальная, экономическая, экологическая и пр. оценки процесса.



Beckmann M., C.B. McGuire C.B., Winsten C.B. Studies in the economics of transportation // Research memorandum No. RM-1488, Santa Monica: RAND Corporation, 1955.

# Поведенческие принципы

## Анархия

Каждый участник минимизирует свои затраты, не вступая в коалиции, не обмениваясь информацией, не помогая и не противодействуя остальным (BMW-модель).

# Поведенческие принципы

## Анархия

Каждый участник минимизирует свои затраты, не вступая в коалиции, не обмениваясь информацией, не помогая и не противодействуя остальным (BMW-модель).

## Тоталитаризм

Оптимизируется некоторая общая системная выгода (оптимизационные транспортные задачи).

# Поведенческие принципы

## Анархия

Каждый участник минимизирует свои затраты, не вступая в коалиции, не обмениваясь информацией, не помогая и не противодействуя остальным (BMW-модель).

## Тоталитаризм

Оптимизируется некоторая общая системная выгода (оптимизационные транспортные задачи).

## Олигополия перевозчиков

Перевозки осуществляются относительно небольшой группой конкурирующих ( или вступающих в коалиции между собой) транспортных компаний.



# Поведенческие принципы

## Анархия

Каждый участник минимизирует свои затраты, не вступая в коалиции, не обмениваясь информацией, не помогая и не противодействуя остальным (BMW-модель).

## Тоталитаризм

Оптимизируется некоторая общая системная выгода (оптимизационные транспортные задачи).

## Олигополия перевозчиков

Перевозки осуществляются относительно небольшой группой конкурирующих ( или вступающих в коалиции между собой) транспортных компаний.

## Реальность

Смесь всего вышесказаного.

# Основные предположения BMW-модели

- 1 Поведение экономических агентов в транспортной системе описывается как бескоалиционная игра многих лиц.

# Основные предположения BMW-модели

- 1 Поведение экономических агентов в транспортной системе описывается как бескоалиционная игра многих лиц.
- 2 Результат игры оценивается игроками по удельным временным затратам, которые являются аддитивными функциями нагрузок на элементы сети.

# Основные предположения BMW-модели

- 1 Поведение экономических агентов в транспортной системе описывается как бескоалиционная игра многих лиц.
- 2 Результат игры оценивается игроками по удельным временным затратам, которые являются аддитивными функциями нагрузок на элементы сети.
- 3 Объемы перевозок фиксированы a priori.

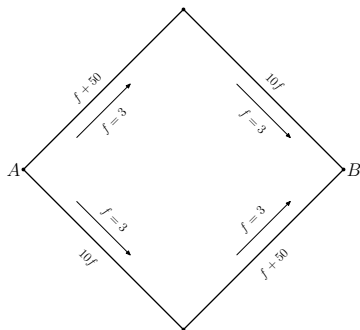
# Основные предположения BMW-модели

- 1 Поведение экономических агентов в транспортной системе описывается как бескоалиционная игра многих лиц.
- 2 Результат игры оценивается игроками по удельным временным затратам, которые являются аддитивными функциями нагрузок на элементы сети.
- 3 Объемы перевозок фиксированы a priori.

## Последующие многочисленные обобщения:

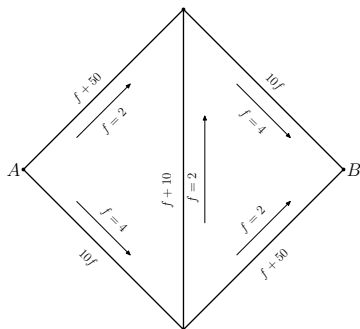
несимметричные затраты, неаддитивные функции, эластичный спрос на перевозки, мультимодальные транспортные системы и многое другое.

## Парадокс Брайеса



Расходы каждого участника — 83 мин.

## Парадокс Брайеса



Расходы каждого участника — 92 мин.

# Анти-парадокс Брайеса в Сеуле





# Математика: входные данные

- Непосредственно наблюдаемые:
  - **Транспортная сеть:** вершины (узлы сети), дуги (участки дорог между узлами).
  - **Маршруты:** пути, соединяющие потокообразующие вершины.
- Косвенно определяемые:
  - **Потокообразующие пары вершин:** откуда–куда должны осуществляться перевозки.
  - **Матрица корреспонденций:** объемы перевозок для потокообразующих пар.
  - **Удельные затраты:** время или деньги, затрачиваемые на перевозку единицы продукта по заданному маршруту (зависит от загрузки сети !).

## Моделирование корреспонденций

Известны общие объемы прибытия-отправления по пунктам, определяются корреспонденции  $T_{ij}$  из пункта  $i$  в пункт  $j$ .

- Энтропийные модели:

$$\min \left( \sum_{i,j} T_{ij} c_{ij} + \beta \sum_{i,j} T_{ij} \ln T_{ij} \right), \quad \sum_{i=1}^m T_{ij} = D_j, \quad \sum_{j=1}^n T_{ij} = S_i, \quad T_{ij} \geq 0.$$

- Гравитационные модели:

$$A_i = \left( \sum_{j=1}^n B_j D_j f(c_{ij}) \right)^{-1} \quad B_j = \left( \sum_{i=1}^m A_i S_i f(c_{ij}) \right)^{-1} .$$

$$T_{ij} = A_i B_j S_i D_j f(c_{ij}),$$

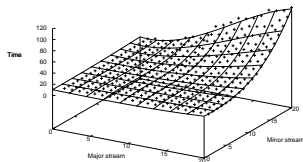
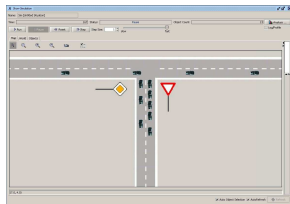
$f(c_{ij})$  — функция "притяжения" между пунктами  $i$  и  $j$ .

- ++ много других ...

# Построение функций транспортных затрат

## Основные подходы

- 1 статистический: BPR-функция  $t_e(x) = \bar{t}_e \left(1 + \frac{x}{y_e}\right)^4$
- 2 микро и макро-моделирование: модель разумного водителя, трехфазная модель Керстена и пр.
- 3 имитационный: агентное моделирование ( ANYLOGIC, SESAME, AIMSUM, PTV, TRANSIMS и пр. )



# Математика: переменные

- **Потоковые переменные по путям:** объемы перевозок (количество автомобилей) выбравших тот или иной маршрут. Количество переменных потенциально комбинаторно велико, но достаточно легко сокращается.
- **Потоковые переменные по дугам:** объемы перевозок по дугам, расщепленные по дополнительным признакам. Количество переменных оценивается 4-ой степенью количества узлов сети.  
Владивосток — примерно  $3.5 \cdot 10^{14}$  переменных ( 4 дня )  
Москва — порядка  $10^{20}$  переменных ( 3000 лет )

## Математика: модельные соотношения

- Материальные балансы

$$\sum_{p \in P_w} x_p = d_w \quad \forall w \in W,$$

$$x_p \geq 0, \quad \forall p \in P.$$

- Условия комплементарности

$$x_p u_{p,w}(x) = 0 \quad \forall w \in W, p \in P_w,$$

где

$$u_{p,w}(x) = Z_p(x) - \min_{q \in P_w} Z_q(x) \geq 0$$

проигрыш по затратам на маршруте  $p$  по сравнению с наилучшим вариантом проезда для  $w$ .





# Математика: аппарат

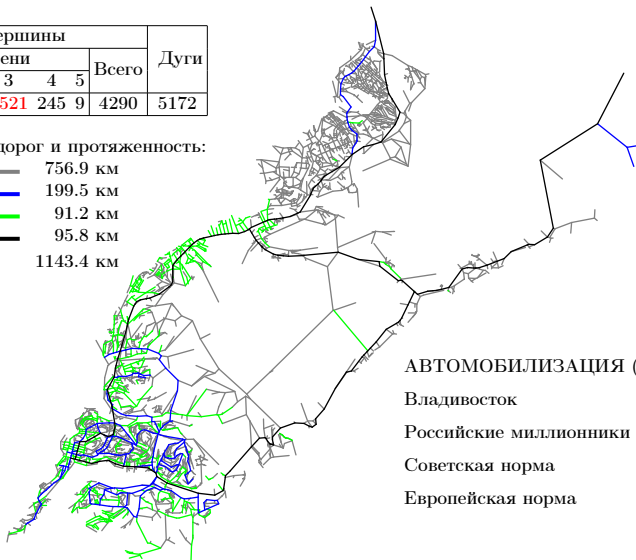
- теория и численные методы решения вариационных неравенств различных типов, в частности, проективные методы фейеровского типа:
  - Нурминский Е.А. Фейеровские процессы с малыми возмущениями // Доклады АН. 2008. т. 422, вып. 5. С. 601-605.
  - Нурминский Е. А. Фейеровские алгоритмы с адаптивным шагом // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2011. Т. 51, No. 5. С. 791-801.
  - Шамрай Н. Б. Поиск потокового равновесия проективными методами с использованием декомпозиции и генерации маршрутов // Автоматика и телемеханика. 2012. No 3.
  - и др. см [http://elis.dvo.ru/~lab\\_11](http://elis.dvo.ru/~lab_11)
- высокопроизводительные вычисления:
  - параллельные алгоритмы решения полиэдральных проективных задач;
  - многопроцессорные вычислительные комплексы ЦКП ДВВР ИАПУ ДВО РАН (Владивосток), ИПМ им. Келдыша (Москва);

# Моделирование транспортной сети Владивостока

Вершины					Всего	Дуги
Степени						
1	2	3	4	5		
1274	241	2521	245	9	4290	5172

Категории дорог и протяженность:

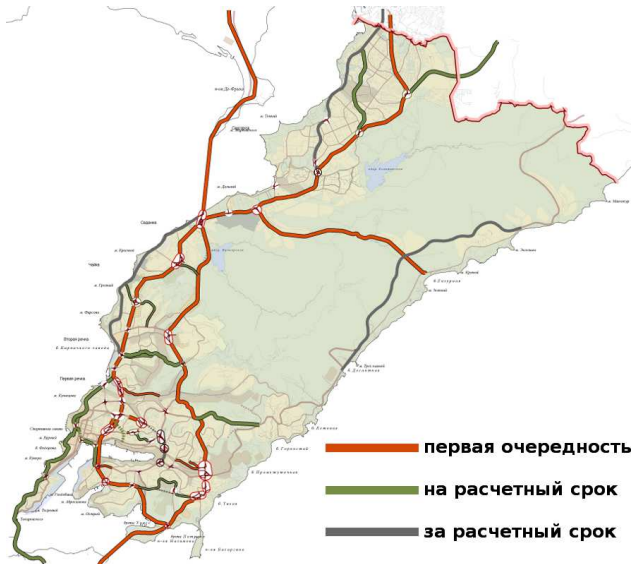
1		756.9 км
3		199.5 км
2		91.2 км
4		95.8 км
<b>ИТОГО</b>		<b>1143.4 км</b>



АВТОМОБИЛИЗАЦИЯ (авто/тыс.чел.):

Владивосток	566
Российские миллионники	300-380
Советская норма	60
Европейская норма	400

# Генеральный план развития УДС Владивостока

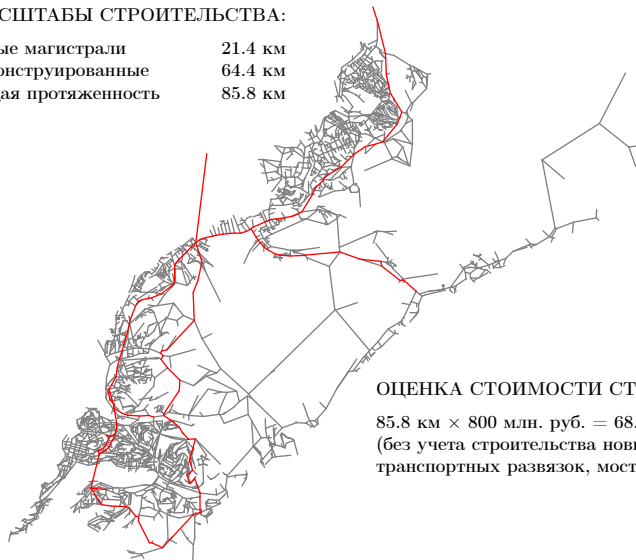




# Дороги первой очередности строительства

## МАСШТАБЫ СТРОИТЕЛЬСТВА:

новые магистрали	21.4 км
реконструированные	64.4 км
общая протяженность	85.8 км



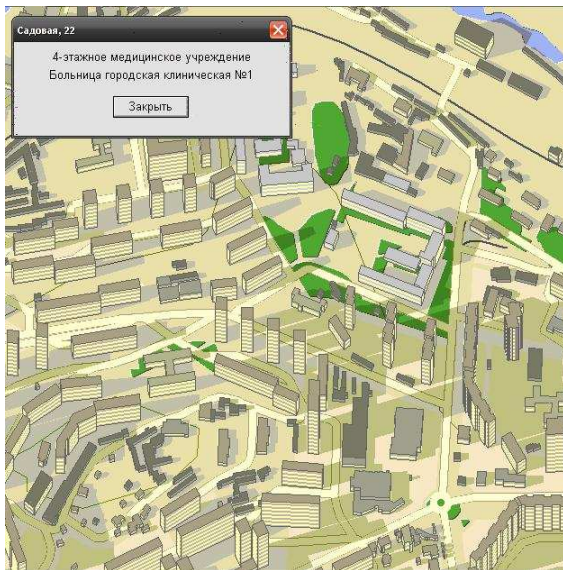
## ОЦЕНКА СТОИМОСТИ СТРОИТЕЛЬСТВА:

$85.8 \text{ км} \times 800 \text{ млн. руб.} = 68.6 \text{ млрд. руб.}$   
(без учета строительства новых эстакад,  
транспортных развязок, мостов)

# Зонирование территории Владивостока



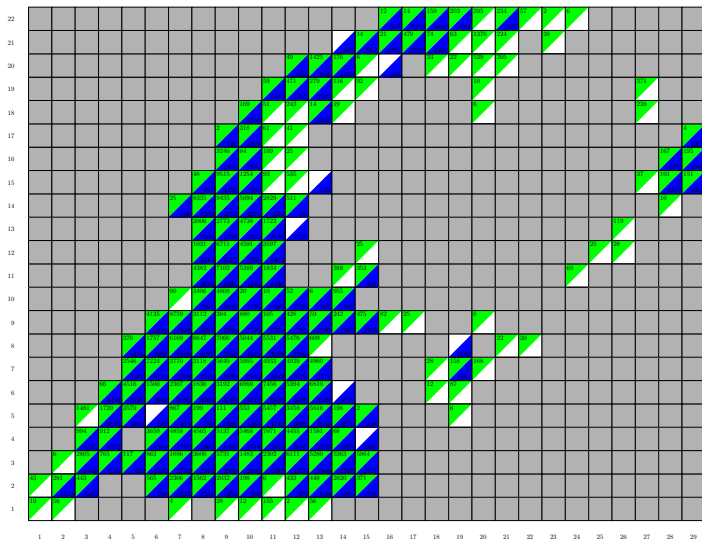
# Зонирование территории Владивостока



## Статистика рабочих мест: источники данных

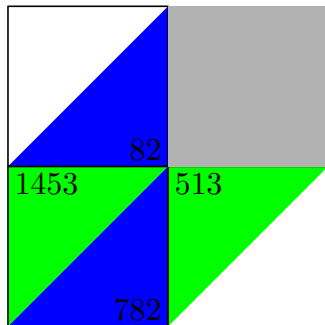
- 1 Форпост у океана - Владивосток (статистический ежегодник с исторической справкой). – Владивосток: Издательство Примстат, 2008.
- 2 Здравоохранение и социальное обеспечение в Приморском крае (статистический сборник). – Владивосток: Издательство Примстат, 2008.
- 3 Труд и занятость населения во Владивостоке (статистический сборник). – Владивосток: Издательство Примстат, 2008.
- 4 Рынок труда Владивостока (статистический бюллетень). – Владивосток: Издательство Примстат, 2009.
- 5 О состоянии образования во Владивостоке (аналитическая записка). – Владивосток: Издательство Примстат, 2009.
- 6 Паспорт города : <http://www.vlc.ru>

# Матрицы отправления и прибытия



Максимальная ошибка в наблюдаемых корреспонденциях — 14%

# Матрицы отправления и прибытия



Численность постоянного населения г.Владивостока составляет 578800 человек ( 2008 г).

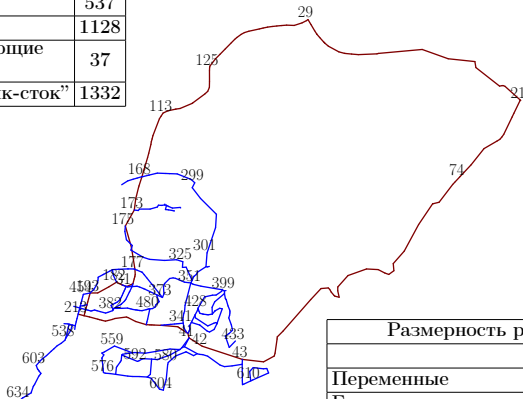
Расчеты по матрице отправлений – 587768.

Ошибка – 8968 ( 1.5% ).

Максимальная ошибка в наблюдаемых корреспонденциях — 14%.

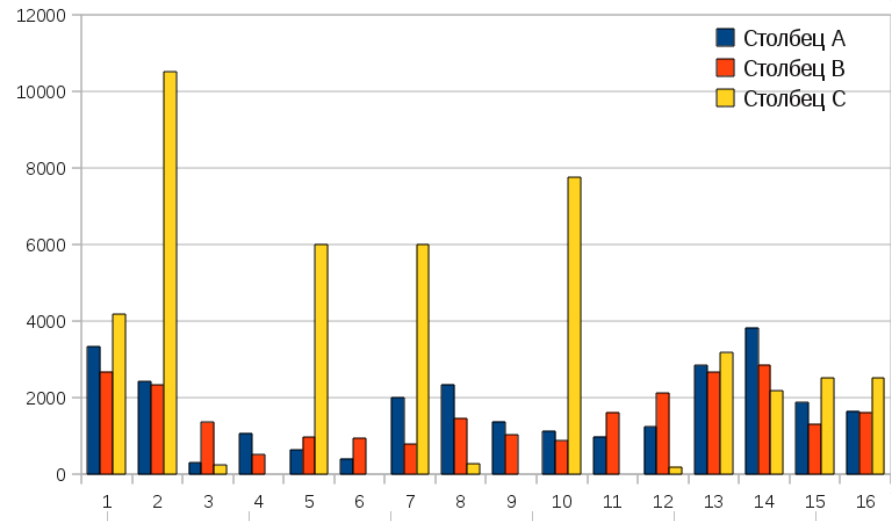
# Параметры решаемых задач

Параметры сети	
Вершины	537
Дуги	1128
Потокообразующие вершины	37
Пары "источник-сток"	1332



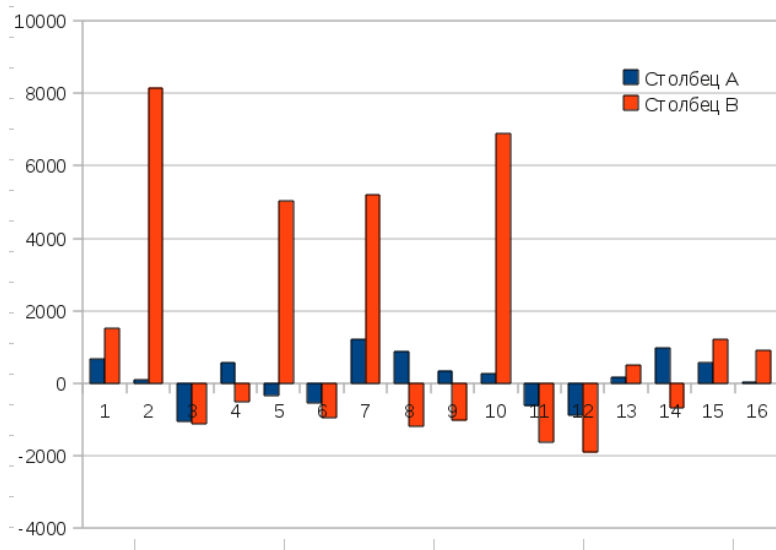
Размерность решаемых задач		
	Модель 1	Модель 2
Переменные	13202	41736
Баланс. ограняя	1332	19869
Огран. проп. способ.	—	1128

## Сравнение с натурными замерами








## Сравнение с натурными замерами



# Изменение загрузки перспективной УДС

Изменения загрузки дуг:

-  без изменений/новые дороги
-  уменьшение
-  увеличение



Системные задержки:

Реальная УДС 10369

Перспективная УДС 7279.7

**СОКРАЩЕНИЕ 29.7%**

# Сотрудничество

- Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
  - ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2013 годы»
  - Программа Президиума РАН "Алгоритмы и математическое обеспечение для вычислительных систем сверхвысокой производительности"
- Московский физико-технический институт
  - Первая учебная коллективная монография по мат. моделированию транспортных потоков: Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие // Под ред. А.В. Гасникова. М.: МФТИ, 2010. 361 с. ISBN 978-5-7417-0334-2.
  - Разработка математической модели транспортной системы Москвы (совместно с Деп. транспорта г. Москвы и др. участниками).
- Департамент транспорта г. Владивостока.