УДК 519.8

ТОЧНАЯ ЛП-ОЦЕНКА ДЛЯ ВЗВЕШЕННОГО ЧИСЛА УСТОЙЧИВОСТИ T-СОВЕРШЕННЫХ ГРАФОВ

П. И. Стецюк[1], В. И. Ляшко, Е. А. Нурминский[1]

Резюме. Для взвешенного числа устойчивости неориентированного графа $G = (V, E)$ построена верхняя ЛП-оценка, которая равна оптимальному значению целевой функции в задаче линейного программирования с числом переменных $|V| + |\bar{E}|$ и числом ограничений $O(|V|^3)$, где V – количество вершин в графе, а $|\bar{E}|$ – количество ребер в графе, дополнительном к графу G. Доказано, что полученная ЛП-оценка является не менее точной оценкой сверху для взвешенного числа устойчивости произвольного графа, чем известная верхняя оценка, связанная с многогранником нечетных циклов. Следствием этого факта есть то, что ЛП-оценка является точной для взвешенного числа устойчивости t-совершенных графов.

Введение

Задача о вычислении взвешенного числа устойчивости графа и задача об определении взвешенного наибольшего устойчивого множества вершин графа относятся к классу NP-трудных задач в области теории графов. Обе они связаны с неориентированным графом, вершинам которого приписаны целые веса, однако это две принципиально разные задачи и решение первой не слишком помогает при попытках решить вторую.

Для случая, когда все веса вершин графа равны единице, сами задачи и различие между ними можно продемонстрировать на примере известной проблемы восьми ферзей, которую связывают с именем К. Гаусса. Эта проблема состоит в нахождении наибольшего числа ферзей, которые можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не атаковали друг друга. Очевидно, что таких ферзей не может быть более восьми, т.к. никакие два из них не должны находиться на одной вертикали или горизонтали.

С этой задачей можно сопоставить неориентированный граф, вершинам которого соответствуют клетки шахматной доски, а ребрами соединены пары клеток, лежащие на одной вертикали, горизонтали или диагонали. Расстановке ферзей, не бьющих друг друга, будет соответствовать выбор такого подмножества вершин-клеток, в котором ни одна из вершин не соединена с другой. Именно такое подмножество и называется устойчивым.

В графе для задачи о восьми ферзях можно довольно легко найти одну из возможных расстановок (наибольших устойчивых множеств) и поскольку большее число ферзей не может быть расставлено, то число устойчивости этого графа равно 8. Вместе с тем существуют 92 такие расстановки [1], с. 43-44 и понятно, что указать все сооответствующие им наибольшие устойчивые множества существенно труднее.

[1] Работа выполнена в рамках совместного украинско-российского проекта ДФФД Украины – Ф28.1/005 и РФФИ – 09-01-90413-Укр.

Данная работа связана с исследованием верхней границы для взвешенного числа устойчивости неориентированного графа, которое является обобщением числа устойчивости. Эта граница названа ЛП-оценкой и она равна оптимальному значению целевой функции в специально сконструированной задаче линейного программирования с полиномиальным количеством линейных ограничений. Она может быть перенесена на случай взвешенного кликового числа, не менее известной NP-трудной задаче в теории графов. Кликой в неориентированном графе называется подмножество вершин, каждые две из которых соединены ребром. Обе задачи по сути эквивалентны: каждая из них получается из другой, путем построения дополнения графа – такого графа, в котором есть все вершины исходного графа, причем в дополнении графа вершины соединены ребром тогда и только тогда, если они не были соединены в исходном графе. Устойчивое (независимое) множество вершин в исходном графе является кликой в дополнительном графе к исходному, и наоборот.

1. Взвешенное число устойчивости $\alpha(G, w)$

Пусть $G = (V, E)$ – взвешенный неориентированный граф (не содержащий петель) с множеством вершин V и множеством ребер E, вес каждой вершины $i \in V$ задан положительным целым числом w_i. Основным обьектом исследований в данной работе является так называемое устойчивое (или независимое) множество графа G.

Определение *Подмножество вершин $S \subseteq V$ называется устойчивым (или независимым) множеством графа G, если для любых $i, j \in S$ ребро $e = (i, j)$ не принадлежит E.*

Взвешенное число устойчивости графа G определяется как $\alpha(G, w) = \max \sum_{i \in S} w_i$, где $S \subseteq V$ – устойчивое множество. Подмножество S^*, на котором достигается $\alpha(G, w)$, называется максимальным взвешенным устойчивым (*или независимым*) множеством графа G. В частном случае, когда все веса вершин в графе равны единице, оно совпадает с обычным числом устойчивости графа G, которое принято обозначать $\alpha(G)$. Число устойчивости $\alpha(G)$ характеризует мощность максимального по числу входящих в него вершин устойчивого множества в графе G. В общем случае задача нахождения $\alpha(G, w)$ принадлежит к NP-трудным задачам [2].

Пусть $STAB(G)$ – многогранник устойчивых множеств (stable set polytope). определяемый как выпуклая оболочка булевых индикаторных векторов устойчивых множеств S в графе G:

$$STAB(G) = conv\{x^S, S - \text{устойчивое множество в графе } G.\} \tag{1.1}$$

Индикаторный вектор множества S определяется как $x^S = (x_i^S, i \in V) \in \{0,1\}^{|V|}$, где

$$x_i^S = \begin{cases} 1 & \text{если } i \in S; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Условие устойчивости множества S может быть представлено в виде системы квадратичных равенств для компонент вектора x^S:

$$x_i^S x_j^S = 0 \text{ для всех } (i, j) = e \in E.$$

Квадратичные равенства означают, что если две вершины связаны ребром в графе G, то они обе не могут одновременно принадлежать устойчивому множеству S.

Нахождение $\alpha(G,w)$ связано с задачей максимизации линейной функции $\sum_{i\in V} w_i x_i = wx$ на выпуклом многограннике $STAB(G)$:

$$\alpha(G,w) = \max_{x\in STAB(G)} wx = \max_{S} wx^S, \tag{1.2}$$

где последний максимум берется по всем устойчивым подмножествами V. Максимум линейной функции в задаче (1.2) достигается в одной или нескольких из вершин многогранника $STAB(G)$. В общем случае многогранник $STAB(G)$ имеет сложную структуру, из-за чего задача нахождения $\alpha(G,w)$ принадлежит к NP-трудным задачам.

Однако, существует много семейств графов, для которых $\alpha(G,w)$ может быть найдено за полиномиальное время. Одним из таких семейств графов являются t-совершенные графы. Их название происходит от французского слова "trou", которое в переводе на руский язык означает "дыра". Само это название выделяет нечетный цикл в графе G (содержит нечетное количество вершин), который является центральным при определении t-совершенных графов. Нечетный цикл в графе G далее будем обозначать C_{2k+1}, $k = 1,2,\ldots$, а соответствующее ему подмножество вершин графа через $V(C_{2k+1})$.

Полиномиальный алгоритм нахождения $\alpha(G,w)$ для t-совершенных графов в значительной мере обязан такой задаче линейного программирования (ЛП-задаче)

$$\alpha^*_C(G,w) = \max \sum_{i\in V} w_i x_i, \tag{1.3}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 0 \le x_i \le 1 & \text{для каждой вершины } i \in V, \\ x_i + x_j \le 1 & \text{для каждого ребра } (i,j) = e \in E, \\ \sum_{i\in V(C_{2k+1})} x_i \le k & \text{для каждого нечетного цикла } C_{2k+1} \in G. \end{cases} \tag{1.4}$$

Многогранник, заданный ограничениями (1.4), называется многогранником нечетных циклов (odd-cycle polytope), и его принято обозначать $CSTAB(G)$. Он определяется справедливыми для многогранника $STAB(G)$ семействами линейных неравенств для вершин, линейных неравенств для ребер и линейных неравенств для нечетных циклов в графе G.

Для произвольного графа G величина $\alpha^*_C(G,w)$ удовлетворяет условию

$$\alpha^*_C(G,w) \ge \alpha(G,w) \tag{1.5}$$

и является оценкой сверху (верхней оценкой) для $\alpha(G,w)$. Неравенство (1.5) следует из того, что многогранник $CSTAB(G)$ аппроксимирует (сверху) многогранник $STAB(G)$. Семейство графов, для которых многогранник устойчивых множеств $STAB(G)$ совпадает с многогранником $CSTAB(G)$, называют t-совершенными графами. Учитывая, что $STAB(G) = CSTAB(G)$, для t-совершенных графов справедливо равенство

$$\alpha_C^*(G,w)=\alpha(G,w) \tag{1.6}$$

и величина $\alpha_C^*(G,w)$ есть точной верхней оценкой для $\alpha(G,w)$.

В общем случае ЛП-задача (1.3)–(1.4) содержит неполиномиальное количество ограничений, что связано с ограничениями в форме неравенств для всех нечетных циклов C_{2k+1} $(k=1,2,\dots)$ в графе G. Несмотря на это ЛП-задача (1.3)–(1.4) полиномиально разрешима в том смысле, что для произвольного графа G оптимальное значение целевой функции $\alpha_C^*(G,w)$ может быть найдено с любой заданной точностью за полиномиальное время. Алгоритм на основе метода эллипсоидов дан в [2], с. 275–276. Если граф G принадлежит семейству t-совершенных графов, то равенство (1.6) обеспечивает нахождение $\alpha(G,w)$ за полиномиальное время.

Полиномиальный алгоритм для нахождения верхней оценки $\alpha_C^*(G,w)$ базируется на использовании метода эллипсоидов. Он имеет скорее теоретическую ценность, чем практическую, и неприменим для нахождения оценки $\alpha_C^*(G,w)$ в том случае, когда граф содержит около сотни вершин. В то же время практически эффективные алгоритмы нахождения $\alpha_C^*(G,w)$ для графов такого размера и больше могут быть реализованы на основе современных ЛП-солверов, для которых решение ЛП-задач с сотнями тысяч переменных и миллионами ограничений не представляет особых проблем для современных компьютеров с оперативной памятью в несколько десятков гигабайт. Чтобы обеспечить полиномиальность таких алгоритмов, достаточно ограничить размеры ЛП-задачи вида (1.3)–(1.4) по числу ограничений, и в качестве ЛП-солвера использовать такой, который позволяет решить ЛП-задачу за полиномиальное время.

Для верхней оценки $\alpha_C^*(G,w)$ существует аналог ЛП-задачи с полиномиальным количеством линейных ограничений [3], стр. 1187. Такая ЛП-задача содержит $O(|V|^2)$ переменных и $O(|V|^2|E|)$ ограничений. В [4] построена верхняя оценка $\alpha_\Delta^*(G,w)$, которая по точности не хуже чем $\alpha_C^*(G,w)$, при этом ей соответствует ЛП-задача с меньшим количеством переменных и ограничений. Она включает $O(|V|^3)$ ограничений и $|V|+|\bar{E}|$ переменных, где $|\bar{E}|$ – количество ребер в дополнительном графе к графу G. Предметом обсуждения ниже будет еще одна верхняя оценка подобного типа, назовем ее ЛП-оценкой $\alpha_\nabla^*(G,w)$, которая получена линейной релаксацией квадратичных ограничений, связывающих между собой тройки булевых переменных.

2. ЛП-оценка $\alpha_\nabla^*(G,w)$

Приведем ЛП-оценку $\alpha_\nabla^*(G,w)$ и покажем, что она является решением ЛП-задачи с числом переменных $(|V|+|\bar{E}|)$ и числом ограничений $O(|V|^3)$. Нахождению ЛП-оценки $\alpha_\nabla^*(G,w)$ соответствует такая ЛП-задача: найти

$$\alpha_\nabla^*(G,w)=\max\sum_{i\in V} w_i x_i \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$x_{ij}=0 \quad \forall\,(i,j)=e\in E, \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} -x_{ij} - x_{ik} - x_{jk} + x_i + x_j + x_k \le 1, \\ \quad +x_{ij} + x_{ik} - x_{jk} - x_i \le 0, \\ \quad +x_{ij} - x_{ik} + x_{jk} - x_j \le 0, \\ \quad -x_{ij} + x_{ik} + x_{jk} - x_k \le 0, \end{cases} \qquad \forall\, i, j, k \in V : i < j < k \tag{2.3}$$

$$0 \le x_i \le 1 \quad i \in V. \tag{2.4}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1 *Для произвольного графа G ЛП-оценка $\alpha^*_\nabla(G, w)$ удовлетворяет соотношению:*

$$\alpha^*_\nabla(G, w) \ge \alpha(G, w).$$

Доказательство. За основу возьмем квадратичную булеву формулировку задачи о максимальном взвешенном устойчивом множестве [5]:

$$\alpha(G, w) = \max \sum_{i \in V} w_i x_i \tag{2.5}$$

при ограничениях

$$x_i x_j = 0 \quad \forall\, (i, j) = e \in E, \tag{2.6}$$

$$x_i^2 - x_i = 0 \quad \forall\, i \in V. \tag{2.7}$$

Квадратичная задача (2.5)–(2.7) фактически есть другой формой записи задачи (1.2), для которой булевы переменные $x_i \in \{0, 1\}$ для всех вершин из V описаны квадратичными ограничениями-равенствами (2.7).

Добавим к задаче (2.5)– (2.7) следующее семейство квадратичных ограничений

$$\begin{cases} +x_i x_j + x_i x_k + x_j x_k - x_i - x_j - x_k \ge -1, \\ \quad -x_i x_j - x_i x_k + x_j x_k + x_i \ge 0, \\ \quad -x_i x_j + x_i x_k - x_j x_k + x_j \ge 0, \\ \quad +x_i x_j - x_i x_k - x_j x_k + x_k \ge 0, \end{cases} \qquad \forall\, i, j, k \in V : i < j < k. \tag{2.8}$$

Квадратичные ограничения (2.8) не изменяют множества допустимых решений задачи (2.5)–(2.7). На самом деле, они являются следствием квадратичных неравенств

$$\begin{cases} +y_i y_j + y_i y_k + y_j y_k \ge -1, \\ -y_i y_j - y_i y_k + y_j y_k \ge -1, \\ -y_i y_j + y_i y_k - y_j y_k \ge -1, \\ +y_i y_j - y_i y_k - y_j y_k \ge -1, \end{cases} \qquad \forall\, i, j, k \in V : i < j < k. \tag{2.9}$$

для бинарных (± 1)-переменных y_i, $i \in V$, если бинарные переменные перевести в булевые $(0 - 1)$-переменные x_i, $i \in V$ с помощью следующей замены

$$y_i = 1 - 2x_i \quad \forall\, i \in V.$$

Квадратичные ограничения (2.9) следуют из того, что для произвольной тройки бинарных (± 1)-переменных y_i, y_j и y_k, такой что $i \ne j \ne k$, всегда справедливы квадратичные ограничения в форме неравенств [6]

$$\begin{cases} (+y_i + y_j + y_k)^2 \geq 1, \\ (-y_i + y_j + y_k)^2 \geq 1, \\ (+y_i - y_j + y_k)^2 \geq 1, \\ (+y_i + y_j - y_k)^2 \geq 1, \end{cases}$$

Последние легко преобразуются к неравенствам (2.9), учитывая, что $y_i^2 = 1$, $y_j^2 = 1$ и $y_k^2 = 1$.

Линеаризуем задачу (2.5)–(2.8), положив $x_{ij} = x_i x_j \ \forall \ i, j \in V : i < j$ и релаксируя ограничения (2.7) линейными неравенствами $0 \leq x_i \leq 1 \ \forall \ \ i \in V$. Оптимальное значение целевой функции в релаксированной задаче обозначим $\alpha^*_\bigtriangledown(G, w)$. В результате получаем ЛП-задачу (2.1)–(2.4) для величины $\alpha^*_\bigtriangledown(G, w)$, которая и названа ЛП-оценкой $\alpha^*_\bigtriangledown(G, w)$. Учитывая, что ЛП-задача (2.1)–(2.4) получена в результате "ослабления" квадратичной задачи (2.5)–(2.8), то ЛП-оценка $\alpha^*_\bigtriangledown(G, w)$ для произвольного графа G удовлетворяет соотношению:

$$\alpha^*_\bigtriangledown(G, w) \geq \alpha(G, w). \tag{2.10}$$

Следовательно, ЛП-оценка $\alpha^*_\bigtriangledown(G, w)$ будет оценкой сверху для $\alpha(G, w)$. Соотношение (2.10) доказывает лемму 1.

ЛП-задача (2.1)–(2.4) содержит $|V|(|V| + 1)/2$ переменных и $O(|V|^3)$ ограничений. Однако, число переменных в ней можно уменьшить. На самом деле $|E|$ линейных переменных, которые соответствуют ребрам графа G и заданы ограничениями (2.2), фиксированы и равны нулю. Это означает, что в ЛП-задаче (2.1)–(2.4) можно избавиться от ограничений (2.2), подставляя нулевые значения для тех переменных, которые они определяют, непосредственно в ограничения (2.3). В результате в новой ЛП-задаче останутся только переменные x_{ij} для тех пар (i, j), которые не принадлежат множеству ребер E. Все эти пары определяют множество ребер $\bar{E}$ в дополнительном графе к графу G. Число переменных в новой ЛП-задаче будет равным $|V| + |\bar{E}|$, где $|\bar{E}|$ – количество ребер в графе, дополнительном к графу G. При этом порядок ограничений в новой задаче останется равным $O(|V|^3)$, но реальное число ограничений может уменьшиться. Так, например, если структура графа G такова, что существуют такие тройки вершин i, j и k, для которых все три пары (i, j), (i, k) и (j, k) принадлежат множеству ребер E, то линейные переменные x_{ij}, x_{ik} и x_{jk} равны нулю из ограничений (2.2). Тогда, четыре ограничения в (2.3) вырождаются в единственное ограничение

$$x_i + x_j + x_k \leq 1,$$

так как остальные три ограничения связаны с неотрицательностью переменных x_i, x_j и x_k и дублируются ограничениями (2.4).

ЛП-задача, где отсутствуют ограничения в форме (2.2), будет более економной для вычисления ЛП-оценки $\alpha^*_\bigtriangledown(G, w)$ с помощью стандартных ЛП-программ. Однако, мы далее будем придерживаться ее формы записи как ЛП-задачи (2.1)–(2.4), в основном, из-за удобства всех дальнейших доказательств, где будем в явном виде использовать факт равенства нулю тех или иных переменных вида x_{ij}, которые следуют из ограничений (2.2).

3. ЛП-ОЦЕНКА $\alpha^*_\nabla(G,w)$ И НЕЧЕТНЫЙ ЦИКЛ

Наличие ограничений (2.3) придает ЛП-задаче (2.1)–(2.4) интересные "геометрические" свойства, связанные с нечетным циклом C_{2k+1} в графе G. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2 *Из ограничений (2.2) и (2.3) следует справедливость линейных неравенств*

$$\sum_{i\in V(C_{2k+1})} x_i \le k \text{ для каждого нечетного цикла } C_{2k+1}\in G.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный нечетный цикл C_{2k+1} с вершинами $\{i_1,\ldots,i_{2k+1}\}$ и ребрами (i_r,i_{r+1}), $r=1,\ldots,2k$, (i_1,i_{2k+1}). Не ограничивая общности, будем считать что $i_1<i_2<\ldots<i_{2k+1}$.

Если $k=1$ (соответствует нечетному циклу C_3), то для тройки вершин (i_1,i_2,i_3) из первого неравенства из (2.3) имеем:

$$x_{i_1}+x_{i_2}+x_{i_3}\le 1+x_{i_1i_2}+x_{i_1i_3}+x_{i_2i_3}.$$

Учитывая, что для ребер (i_1,i_2), (i_1,i_3) и (i_2,i_3) из равенств (2.2) имеем $x_{i_1i_2}=0$, $x_{i_1i_3}=0$ и $x_{i_2i_3}=0$, то из приведенного выше равенства следует

$$\sum_{r=1}^{3}x_{i_r}\le 1 \qquad 8;8 \qquad \sum_{i\in V(C_3)}x_i\le 1,$$

что дает доказательство леммы для нечетного цикла C_3.

Пусть k – произвольное натуральное число, такое что $k\ge 2$. Рассмотрим "покрытие" нечетного цикла C_{2k+1} двумя типами треугольников (тройками вершин), которое для нечетного цикла C_9 проиллюстрировано на рис. 1. Для первого типа треугольников ("незаштрихованные") будем использовать первое неравенство из (2.3), а для второго типа треугольников ("заштрихованные") будем использовать третье неравенство из (2.3).

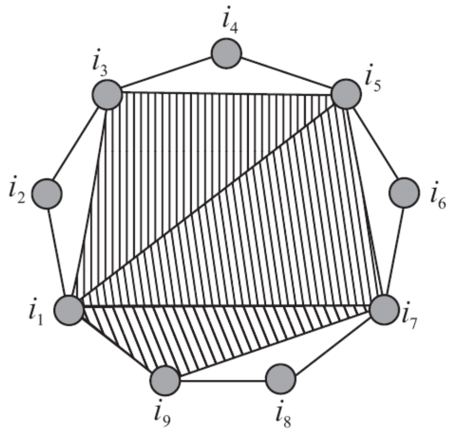

Рис. 1. Покрытие нечетного цикла C_9 треугольниками

Первый тип треугольников содержит такие тройки вершин $(i_{2t-1},i_{2t},i_{2t+1})$ для всех $t=1,\ldots,k$ и для каждой пары (i_{2t-1},i_{2t}) и (i_{2t},i_{2t+1}) из равенств (2.2) имеем

$x_{i_{2t-1}i_{2t}} = 0$ и $x_{i_{2t}i_{2t+1}} = 0$. Для треугольников этого типа из первого неравенства в (2.3) следует справедливость таких неравенств

$$x_{i_{2t-1}} + x_{i_{2t}} + x_{i_{2t+1}} - x_{i_{2t-1}i_{2t+1}} \le 1, \quad t = 1, \dots, k,$$

сложив которые получаем неравенство

$$\sum_{t=1}^{k} x_{i_{2t-1}} + \sum_{t=1}^{k} x_{i_{2t}} + \sum_{t=1}^{k} x_{i_{2t+1}} - \sum_{t=1}^{k} x_{i_{2t-1}i_{2t+1}} \le k.$$

Учитывая, что

$$\sum_{t=1}^{k} x_{i_{2t-1}} + \sum_{t=1}^{k} x_{i_{2t}} = \sum_{t=1}^{k} \left(x_{i_{2t-1}} + x_{i_{2t}}\right) = \sum_{r=1}^{2k} x_{i_r},$$

последнее неравенство запишем в такой форме

$$\sum_{r=1}^{2k} x_{i_r} + \sum_{t=1}^{k} x_{i_{2t+1}} - \sum_{t=1}^{k} x_{i_{2t-1}i_{2t+1}} \le k. \tag{3.1}$$

Второй тип треугольников ("заштрихованные") составляют такие тройки вершин (i_1, i_3, i_5), ..., $(i_1, i_{2k-1}, i_{2k+1})$. Количество таких троек равно $(k-1)$. Из третьего неравенства в (2.3) для них следует справедливость таких неравенств

$$x_{i_1 i_{2t-1}} - x_{i_1 i_{2t+1}} + x_{i_{2t-1}i_{2t+1}} - x_{i_{2t-1}} \le 0, \quad t = 2, \dots, k,$$

сложив которые получаем неравенство

$$x_{i_1 i_3} - x_{i_1 i_{2k+1}} + \sum_{t=2}^{k} x_{i_{2t-1}i_{2t+1}} - \sum_{t=2}^{k} x_{i_{2t-1}} \le 0.$$

Учитывая, что для ребра (i_1, i_{2k+1}) из (2.2) следует $x_{i_1 i_{2k+1}} = 0$, и то, что

$$x_{i_1 i_3} + \sum_{t=2}^{k} x_{i_{2t-1}i_{2t+1}} = \sum_{t=1}^{k} x_{i_{2t-1}i_{2t+1}} \qquad \text{и} \qquad \sum_{t=2}^{k} x_{i_{2t-1}} = \sum_{t=1}^{k-1} x_{i_{2t+1}},$$

последнее неравенство запишем в следующем виде

$$\sum_{t=1}^{k} x_{i_{2t-1}i_{2t+1}} - \sum_{t=1}^{k-1} x_{i_{2t+1}} \le 0. \tag{3.2}$$

Сложив неравество (3.1) с неравенством (3.2) получаем

$$\sum_{r=1}^{2k} x_{i_r} + \sum_{t=1}^{k} x_{i_{2t+1}} - \sum_{t=1}^{k-1} x_{i_{2t+1}} = \sum_{r=1}^{2k} x_{i_r} + x_{2k+1} \le k,$$

откуда следует неравенство

$$\sum_{r=1}^{2k+1} x_{i_r} \le k \quad \text{или} \quad \sum_{i \in V(C_{2k+1})} x_i \le k, \tag{3.3}$$

что завершает доказательство леммы.

4. Свойства ЛП-оценки $\alpha^*_{\nabla}(G,w)$

Связь верхней оценки $\alpha^*_C(G,w)$ с ЛП-оценкой $\alpha^*_{\nabla}(G,w)$ характеризует следующая теорема.

Теорема 1 *Для произвольного графа G ЛП-оценка $\alpha^*_{\nabla}(G,w)$ удовлетворяет соотношению:*

$$\alpha^*_C(G,w) \ge \alpha^*_{\nabla}(G,w) \ge \alpha(G,w).$$

Доказательство. Из леммы следует, что $\alpha^*_{\nabla}(G,w) \ge \alpha(G,w)$. Докажем, что $\alpha^*_C(G,w) \ge \alpha^*_{\nabla}(G,w)$. Вначале покажем, что из ограничений (2.2) и (2.3) следует справедливость линейных неравенств

$$x_i + x_j \le 1 \quad \forall\, (i,j) = e \in E. \tag{4.1}$$

Сложим первое неравенство из (2.3) соответственно со вторым, третьим и четвертым неравенствами из (2.3). В результате получаем такие неравенства

$$\begin{cases} -x_{jk} + x_j + x_k \le 1, \\ -x_{ik} + x_i + x_k \le 1, \\ -x_{ij} + x_i + x_j \le 1, \end{cases} \quad \forall\, i,j,k \in V : i < j < k,$$

из которых следует справедливость линейных неравенств

$$-x_{ij} + x_i + x_j \le 1 \quad \forall\, (i,j) = e \in E. \tag{4.2}$$

Учитывая, что из ограничений (2.2) имеем $x_{ij} = 0$ для любого $(i,j) = e \in E$, неравенства (4.2) гарантируют справедливость линейных неравенств (4.1).

ЛП-задача (2.1)–(2.4) эквивалентна такой ЛП задаче:

$$\alpha^*_{\nabla}(G,w) = \max \sum_{i \in V} w_i x_i \tag{4.3}$$

при ограничениях

$$x_{ij} = 0 \quad \forall\, (i,j) = e \in E, \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} -x_{ij} - x_{ik} - x_{jk} + x_i + x_j + x_k \le 1, \\ \quad +x_{ij} + x_{ik} - x_{jk} - x_i \le 0, \\ \quad +x_{ij} - x_{ik} + x_{jk} - x_j \le 0, \\ \quad -x_{ij} + x_{ik} + x_{jk} - x_k \le 0, \end{cases} \quad \forall\, i,j,k \in V : i < j < k, \tag{4.5}$$

$$0 \le x_i \le 1 \quad i \in V, \tag{4.6}$$

$$x_i + x_j \le 1 \quad \forall\, (i,j) = e \in E, \tag{4.7}$$

$$\sum_{i \in V(C_{2k+1})} x_i \le k \quad \forall\ C_{2k+1} \in V, \tag{4.8}$$

Здесь ограничения (4.7) тождественно равны неравенствам (4.1), а ограничения (4.8) следуют из леммы 2.

От ЛП-задачи (4.3)–(4.8) легко перейти к "ослабленной" ЛП-задаче, убрав из нее ограничения (4.4), (4.5) и оставив ограничения (4.6), (4.7) и (4.8). В результате получаем такую ЛП-задачу

$$\alpha^*(G,w) = \max \sum_{i\in V} w_i x_i \tag{4.9}$$

при ограничениях

$$0 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i \in V, \tag{4.10}$$

$$x_i + x_j \le 1 \quad \forall\, (i,j) = e \in E. \tag{4.11}$$

$$\sum_{i\in V(C_{2k+1})} x_i \le k \quad \forall\, C_{2k+1} \in V, \tag{4.12}$$

для которой $\alpha^*(G,w) \ge \alpha^*_{\Delta}(G,w)$. ЛП-задача (4.9)–(4.12) является ничем иным, как формулировкой ЛП-задачи (1.3)–(1.4) для величины $\alpha^*_C(G,w)$, и, следовательно, $\alpha^*(G,w) = \alpha^*_C(G,w)$. Отсюда имеем $\alpha^*_C(G,w) \ge \alpha^*_{\nabla}(G,w)$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и соотношения (1.6) для t-совершенных графов следует справедливость такой теоремы.

Теорема 2 *Если граф G – t-совершенный, то*

$$\alpha^*_{\nabla}(G,w) = \alpha(G,w).$$

Следовательно, ЛП-оценка $\alpha^*_{\nabla}(G,w)$ является точной оценкой сверху для взвешенного числа устойчивости t-совершенных графов.

Литература

1. Берж К. *Теория графов и ее применение.* – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 319 с.
2. Grotschel M., Lovasz L., Schrijver A. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization.* – Springer-Verlag, Berlin. – 1988. – 362 p.
3. Schrijver A. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency.* – Springer, 2003. – 1881 p.
4. Стецюк П.И., Бутенко С.И., Березовский О.А. *Об одной верхней оценке для взвешенного числа устойчивости графа* // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 2007, N6. – С. 80–89.
5. Shor N.Z. *Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems.* – Dordrecht, Kluwer. – 1998. – 394 p.
6. Стецюк П.И. *Новые модели квадратичного типа для задачи о максимальном взвешенном разрезе графа* // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – N.1. – С. 63-75.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, пр. Глушкова, 40, Киев-187, 03680, Украина.

Национальный университет "Киево-Могилянская академия", ул. Сковороды, 2, Киев, 04070, Украина.

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, ул. Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия.

Поступила 08.02.2010