Модель Леонтьева и ее друзья
Версия –revision–

Е.А. Нурминский

2012/03/07

Содержание

Введение

Модель Леонтьева (или Затраты-выпуск) — это классика макроэкономики. А классику надо знать. В этом материале мы рассмотри замкнутый экономический универсум, оперирующий конечныи набором безгранично делимых продуктов. Обозначая количество i-го продукта через x_i, получаем возможность характиризовать различного назначения наборы продуктов через вектора конечномерного пространства $x \in E$.

1 Некоторые обозначения

Векторы $x, y \in E$ удовлетворяют отношению $\geq$ если $x_i \geq y_i$ и $x \neq y$. Иначе это означает, что существует хотя бы одна координата i такая, что $x_i > y_i$.

2 Статические модели

2.1 Модель Леонтьева

В этой модели n продуктов, $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$ — их выпуски, валовый чистый выпуск. Основное соотношение модели

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = c_i, i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

где a_{ij} — затраты i-го продукта на производство единицы j-го. $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ — конечный спрос.

Вопрос: когда система (1) имеет неотрицательное решение ?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим вспомогательную систему

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j = c_i, i = 1, 2, \dots, n \tag{2}$$

где матрица D удовлетворяет основному предположению *внедиагональной неположительности:*

$$d_{ij} \leq 0 \text{ для } i \neq j.$$

Для модели Леонтьева $D = I - A$ и эта матрица, конечно, удовлетворяет условию внедиагональной неположительности.

Рассмотрим следующие условия

1. Система (2) имеет неотрицательное решение $x \geq 0$ для некоторого $c > 0$.

2. Система (2) имеет неотрицательное решение $x \geq 0$ для всех $c \geq 0$.

3. Последовательные главные миноры D положительны:

$$\Delta_k = \det \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

   для $k = 1, 2, \dots, n$.

4. Все главные миноры D положительны:

$$\Delta_{m,k} = \det \begin{vmatrix} d_{m,m} & d_{m2} & \dots & d_{m,m+k} \\ d_{m+1,m} & d_{m+1,m+1} & \dots & d_{m+1,m+k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m+k,m} & d_{m+k,m+1} & \dots & d_{m+k,m+k} \end{vmatrix} > 0$$

   для $m, k = 1, 2, \dots, n, m + k \leq n$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Условия 1, 2, 3, 4 эквивалентны.*

Доказательство. . Эквивалентность в данном случае означает двустороннюю импликацию. Некоторые ($2 \to 1$, $4 \to 3$) тривиальны и выполняются независимо от свойств матрицы D. Другие существенно зависят от выполнения свойства внедиагональной неположительности, которым обладает матрица D.

Докажем 1$\to$3. Доказательство проведем по индукции. Пусть $n = 1$.Тогда, если для некоторого $c_1 > 0$ уравнение

$$d_{11}x_1 = c_1$$

имеет положетельное ($x_{11} = 0$ невозможно вообще) решение, то $d_{11} > 0$. Поскольку d_{11} является единственным последовательным главным минором, то предпложение индукции выполняется для $n = 1$. Пусть теперь 1$\to$3 выполняется для n, то есть для любой системы из

n уравнений со свойством внедиагональной неположительности, у которой для некоторого $c > 0$ существует неотрицательное решение $x_1 \geq 0$, все последовательные главные миноры положительны.

Рассмотрим теперь систему (2) с $n+1$ уравнениями, имеющую для некотрого $c > 0$ неотрицательное решение $x \geq 0$. Тогда

$$d_{11}x_1 = c_1 - \sum_{j=2}^{n+1} d_{ij}x_j > 0$$

и, в силу того, что $x_1 > 0$, $d_{11} > 0$. Используя стандартные исключения Жордана-Гаусса исходную систему

$$\begin{array}{cccc} d_{11}x_1 & +d_{12}x_2 & +\dots & +d_{1,n+1}x_{n+1} = c_1 \\ d_{21}x_1 & +d_{22}x_2 & +\dots & +d_{2,n+1}x_{n+1} = c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n+1,1}x_1 & +d_{n+1,2}x_2 & +\dots & +d_{n+1,n+1}x_{n+1} = c_{n+1} \end{array}$$

можно превратить в систему

$$\begin{array}{cccc} d_{11}x_1 & +d_{12}x_2 & +\dots & +d_{1,n+1}x_{n+1} = c_1 \\ & \bar{d}_{22}x_2 & +\dots & +\bar{d}_{2,n+1}x_{n+1} = \bar{c}_2 \\ & \bar{d}_{32}x_2 & +\dots & +\bar{d}_{3,n+1}x_{n+1} = \bar{c}_3 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \bar{d}_{n+1,2}x_2 & +\dots & +\bar{d}_{n+1,n+1}x_{n+1} = \bar{c}_{n+1} \end{array}$$

где

$$\bar{d}_{ik} = d_{ik} - \frac{d_{i1}}{d_{11}}d_{1k} \leq 0,\ i,k = 2,3,\dots,n+1$$

для $i \neq k$ и

$$\bar{c}_k = c_k - c_1\frac{d_{k1}}{d_{11}} > 0$$

для $k = 2,3,\dots,n+1$.

Подсистема

$$\begin{array}{ccc} \bar{d}_{22}x_2 & +\dots & +\bar{d}_{2,n+1}x_{n+1} = \bar{c}_2 \\ \bar{d}_{32}x_2 & +\dots & +\bar{d}_{3,n+1}x_{n+1} = \bar{c}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{d}_{n+1,2}x_2 & +\dots & +\bar{d}_{n+1,n+1}x_{n+1} = \bar{c}_{n+1} \end{array}$$

удовлетворяет свойству внедиагональной неположительности и имеет неотрицательное решение $x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ для данных $\bar{c}_2, \bar{c}_3, \dots, \bar{c}_{n+1}$. Следовательно, по предположению индукции, ее главные последовательные миноры положительны.

Однако операция исключения Жордана-Гаусса не меняет главных миноров и

$$\Delta_k = \det\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kk} \end{vmatrix} = d_{11}\det\begin{vmatrix} \bar{d}_{22} & \bar{d}_{23} & \dots & \bar{d}_{2k} \\ \bar{d}_{32} & \bar{d}_{33} & \dots & \bar{d}_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{d}_{k2} & \bar{d}_{k3} & \dots & \bar{d}_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

так что свойство 3 таким образом выполнено и для матрицы размером $n+1$. Импликация доказана.

Теперь докажем 3→2. Также по индукции, пусть $n = 1$. При $d_{11} = \Delta_1 > 0$ уравнение $d_{11}x_1 = c_1$ имеет неотрицательное решение для любого $c_1 \geq 0$. Аналогично предыдущему приведем $n + 1$-систему к виду

$$\begin{array}{ccccl}
d_{11}x_1 & +d_{12}x_2 & +\ldots & +d_{1,n+1}x_{n+1} & = c_1 \\
 & \bar{d}_{22}x_2 & +\ldots & +\bar{d}_{2,n+1}x_{n+1} & = \bar{c}_2 \\
 & \bar{d}_{32}x_2 & +\ldots & +\bar{d}_{3,n+1}x_{n+1} & = \bar{c}_3 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & \bar{d}_{n+1,2}x_2 & +\ldots & +\bar{d}_{n+1,n+1}x_{n+1} & = \bar{c}_{n+1}
\end{array}$$

и так как подматрица $\bar{D}$

$$\bar{D} = \begin{vmatrix}
\bar{d}_{22} & \bar{d}_{23} & \ldots & \bar{d}_{2,n+1} \\
\bar{d}_{32} & \bar{d}_{33} & \ldots & \bar{d}_{3,n+1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\bar{d}_{n+1,2} & \bar{d}_{n+1,3} & \ldots & \bar{d}_{n+1,n+1}
\end{vmatrix}$$

имеет неотрицательные последовательные главные миноры, то по предположению индукции у подсистемы

$$\begin{array}{cccl}
\bar{d}_{22}x_2 & +\bar{d}_{23}x_3 & \ldots & +\bar{d}_{2,n+1}x_n = \bar{c}_2 \\
\bar{d}_{32}x_2 & +\bar{d}_{33}x_3 & \ldots & +\bar{d}_{3,n+1}x_n = \bar{c}_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\bar{d}_{n+1,2}x_2 & +\bar{d}_{n+1,3}x_3 & \ldots & +\bar{d}_{n+1,n+1}x_n = \bar{c}_{n+1}
\end{array}$$

существует неотрицательное решение $x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$. при этом

$$x_1 = (c_1 - \sum_{j=2}^{n+1} d_{1j}x_j)/d_{11} \geq 0,$$

т.е. имеет место свойство 2.

Из оставшихся импликаций достаточно доказать 2→4, но это может быть сведено к 2→3 перенумерацией равенств и переменных.

Полученные импликации можно изобразить на коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d] & 2 \arrow[l, "\text{очевидно}"'] \arrow[d] \\
3 \arrow[ur] & 4 \arrow[l, "\text{очевидно}"]
\end{tikzcd}$$

и легко видеть, что ее транзитивное замыкание — полный граф.

2.2 Двойственная форма

Двойственная система имеет вид

$$p_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ji}p_j = v_i, i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

где переменные p_i — это цены. При этом $\sum_{j=1}^{n} a_{ji}p_j$ — это издержки (затраты) на единицу i-го продукта, и $p_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ji}p_j$ — чистый доход. Фиксируем этот чистый доход в виде некоторых величин $v_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n$ (добавленных стоимостей) и получаем систему уравнений (3), существование неотрицательного решения у которой означает существование такой набора цен, что экономика Леонтьева является неубыточной.

По своим свойствам двойственная модель не отличается от прямой и, следовательно там выполняются те же импликации. Однако, так как положительность главных миноров у прямой и двойственной задач выполняется (или нет) одновременно, поэтому коммутативная диаграмма для этой пары задач выглядит как

$$\begin{tikzcd}
1_p \arrow[d] & 2_p \arrow[l, "\text{очевидно}"'] \arrow[d] & 2_d \arrow[r, "\text{очевидно}"] \arrow[d] & 1_d \arrow[d] \\
3_p \arrow[ur] & 4_p \arrow[l, "\text{очевидно}"] \arrow[r, shift right] & 4_d \arrow[l, shift right] \arrow[r, "\text{очевидно}"'] & 3_d \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

где $1_{p,d}, 2_{p,d}, 3_{p,d}, 4_{p,d}$ соответствующие условия для прямой (p) и двойственной (d) моделей, что говорит об эквивалентности понятий продуктивности и прибыльности (неубыточности).

Заметим, что теперь мы можем тривиально доказать критерий продуктивности и прибыльности Брауэра-Соллоу, Действительно, положим $x = (1, 1, \ldots, 1)$. Тогда, если

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < 1$$

то свойство 1 выполнено с $x = (1, 1, \ldots, 1)$ и $c_i = 1 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > 0$. Отсюда, в сиду доказанной эквивалентности, следует и неотрицательная разрешимость модели Леонтьева (продуктивность) для всех $c \geq 0$. Для прибыльности достаточно условие $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

В заключение отметим, что если если c — конечный спрос, v — добавленные стоимости и x, p — решения прямой и двойственной задач, то

$$\sum_{i=1}^{n} c_i p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i(\delta_{ij} - a_{ij})x_j = \sum_{j=1}^{n} v_j x_j$$

т.е. валовый национальный продукт $\sum_{i=1}^{n} c_i p_i$ совпадает с полным национальным доходом $\sum_{j=1}^{n} x_j v_j$.

2.3 Технологические процессы и множества

С точки зрения экономиста, заинтересованного лишь в начальных затратах и конечном результате производства технологический процесс — это нечто вроде "черного ящика" (x, y), где x — ресурсы или продукты, потребляемые в процессе производства, а y — выпускаемая продукция. Такую пару можно назвать технологическим процессом и в наших обозначениях $(x, y) \in E \times E$.

Множество всех возможных в данное время и в данном месте технологических процессов будем обозначать $T \subset E \times E$ и называть технологическим множеством.

Для пояснение приведем пример технологического множества модели Леонтьева. Если обозначить результат (валовой выпуск) модели Леонтьева через y, то, соответственно, для обеспечения такого выпуска потребуется Ay исходных продуктов, где A — матрица прямых затрат. Следовательно, технологическое множество модели Леонтьева — это множество пар вида $(Ay, y), y \geq 0$, которое представляет собой выпуклый многогранный конус. Скорее всего в данном технологическом процессе нас заинтересует чистый выпуск $y - x$, который для модели Леонтьева будет представлять собой множество $T' = \{y - Ay = (I - A)y, y \geq 0\}$.

Можно выделить существенные с точки зрения экономиста черты технологических множеств.

- $\alpha T \subset T$ — (при $0 \leq \alpha \leq 1$?)
- T — выпукло. Это свойство называется отсутствием внешней неэкономичности. В этом случае эффективным оказывается совместное использование нескольких технологических процессов, т.е., если

  $$(x^1, y^1) \in T, (x^2, y^2) \in T$$

  и $\lambda \in [0, 1]$ то

  $$(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, \lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2) = (x_\lambda, y_\lambda) \in T$$

  и, возможно, существует технологический процесс $(x_\lambda, z) \in T$ с $z \geq y_\lambda$, т.е. от совместного использования двух процессов эффективность производства растет.
- Не существует "рога изобилия", "скатерти-самобранки" и т.п.: $(0, y) \in T$ влечет $y = 0$.
- Необратимость: если $(x, y) \in T$, то $(y, x) \notin T$.
- Свободное расходование: если $(x, y) \in T$, то $(x, y') \in T$ для $y' \leq y$.

Важнейшим принципом выбора решений в экономике является рациональность, т.е. стремление получить максимальный результат.

Определение 1. *Процесс (x, y) более эффективен, чем (u, v) если $x \leq u, y \geq v$.*

Отношение эффективности является отношением частичного порядка, поэтому для него можно определить понятие аналогичное понятию максимума.

Определение 2. *Процесс (x, y) называется эффективным, если в T не существует более эффективного процесса (u, v).*

Понятие эффективности можно соотнести с понятием доходности или прибыльности.

Теорема 2. *Пусть T — технологическое множество. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если для некоторого $p > 0$ процесс $(x^\star, y^\star)$ максимизирует прибыль $p(y - x)$ для всех $(x, y) \in T$ то $(x^\star, y^\star)$ — эффективен;*
2. *Пусть T — выпукло. Тогда, если $(x^\star, y^\star)$ — эффективный процесс, то существует $p \geq 0$ такое, что $p(y^\star - x^\star) = \max_{(x,y) \in T} p(y - x)$.*

Доказательство. Докажем 1). Если существует процесс $(x^{\star\star}, y^{\star\star})$, более эффективный, чем $(x^\star, y^\star)$, то $(x^\star\star, -y^\star\star) \leq (x^\star, -y^\star)$ и хотя бы для одного i либо $x_i^{\star\star} < x^\star$ либо $-y_i^{\star\star} - < y^\star$.

Тогда для $p > 0$

$$p(y^{\star\star} - x^{\star\star}) = p(y^\star - x^\star) - p(y^{\star\star} - x^{\star\star}) - p(y^\star - x^\star) = p(y^\star - x^\star) - p(y^{\star\star} - py^\star) - p(x^{\star\star} - x^\star) > p(y^\star - x^\star)$$

что противоречит оптимальности $(x^\star, y^\star)$.

Теперь 2). Пусть $Z = \{(x^\star, y^\star) - T\}$. Очевидно, что Z — выпукло. Поскольку $(x^\star, y^star)$ — эффективный процесс, то $(0,0) \notin int(Z)$ и, следовательно, в силу одной из форм теорем отделимости существует p такое, что $pz \geq 0$ для любого $z \in Z$.

Из ограничености снизу правой части следует, что $p \geq 0$. С другой стороны, вычисляя инфимум правой части по $z \in Z$ получим $p(z^\star - z) \geq 0$ для любого $z \in T$ или $pz^\star \geq pz$ при $z \in T$, т.е. $(x^\star, y^\star)$ максимизирует pz на T. ∎.

В приведенной теореме в части 2 не гарантируется $p > 0$. Оно и на самом деле может не выполняться, как показывает следующий пример.

Пример.

$$T = \{(x_1, x_2) : x1 + x_2^2 \leq 0, x_2 \geq 0\},$$

процесс $(0,0)$.

Для того, чтобы цены были положительными достаточно выполнение простых дополнительных условий.

Теорема 3. *Если T — выпуклый замкнутый конус и $(0,0)$ — эффективный процесс, то существует $p > 0$ такое, что $px \geq 0$ для всех $x \in T$.*

Доказательство.
∎

Замечание Эффективность $(0,0)$ означает несуществование "рога изобилия".

2.4 Теорема о (не)заменимости

В модели Леонтьева есть очень сильное на первый взгляд предположение о постоянстве коэффициентов затрат a_{ij}. Фактически оно означает, что каждый из продуктов производиться по одной технологии, В мире, где существует масса технологий для производства одних и тех же продуктов, такое предположение вызывает большое сомнение. Поэтому можно *apriori* рассмотреть произвольное конечное множество технологических процессов $T_j, j = 1, 2, \ldots$ выпускающих n продуктов, однако, как будет показано ниже, если эти процессы удовлетворяют определенных общим условиям, то ситуация может быть описана с помощью классической модели n процессов.

Упомянутые условия выглядят следующим образом:

A. **В каждом процессе производится только один продукт.**

   То, что в модели Леонтьева это предположение выполняется видно из того, что произвольный вектор валового выпуска $y = (\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n)$ может быть представлен в виде

$$y = \sum_{j=1}^{n} y^j, \; y^j = (0, 0, \ldots, 0, \upsilon_j, 0, \ldots, 0), \tag{4}$$

где для производства j-го продукта в количестве υ_j необходимо затратить $x^j = Ay^j = \upsilon_j A_j$ ресурсов. В последнем выражении A_j — это j-ый столбец матрица прямых затрат A. Соответственно совокупные затраты ресурсов составляют

$$x = \sum_{j=1}^{n} x^j = \sum_{j=1}^{n} \upsilon_j A_j = \sum_{j=1}^{n} Ay^j = A(\sum_{j=1}^{n} y^j) = Ay. \tag{5}$$

Уравнения (4),(5) в совокупности представляют собой разложение технологического множества модели Леонтьева

$$T = (Ay, y) = \sum_{j=1}^{n} T_j$$

на технологические процессы $T_j = (Ay^j, y^j)$.

B. **Есть один незаменимый ресурс, используемый во всех технологических процессах.**

С точки зрения схемы "затраты-выпуск" это означает существование такого ресурса x_k, что если в векторе ресурсов x эта компонента $x_k = 0$, то соответствующи выпуск $y = 0$ в $(x, y) \in T$.

В модели Леонтьева, обозначив такой продукт через λ и приписав ему индекс 0 можно это свойство переформулировать как:

$$a_{0\,j} > 0 \text{ для всех } j = 1, 2, \dots, n \text{ и } a_{0\,0} = 0$$

т.е. этот продукт во всех технологических процессах расходуется, но ни в одном не производится.

Тогда совокупные затраты этого продукта равны нулю

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_{0\,j}\upsilon_j = 0$$

то, очевидно $\upsilon_j = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$ и соответственно $x = Ay = A0 = 0$.

Теперь мы можем в определенной степени забыть о конкретной структуре модели Леонтьева и считеть, что в общей схеме "затраты-выпуск" описания экономики с точки зрения технологический процессов выполнены достаточно абстрактные условия A,B. Тогда оказывается, что при этих предположениях существует представительные процессы $\tilde{T}_j, j = 1, 2, \dots, n$ такие, что множество эффективных процессов является их смесью.

Для последующего нам потребуются следующие обозначения:

$$T_+ = \{(\lambda, y - x) : y - x \geq 0, (\lambda, x, y) \in T,$$

где, как и выше, мы обозначили через λ используемое в технологичских процессах количество незаменимого ресурса. Множество T_+ представляет собой продуктивную часть всего технологического множества T.

Кроме этого, нам понадобятся определенные подмножества T_+. Рассмотрим некоторый процесс $(\omega, c) \in T_+$ и определим множество других процессов, более эффективных, чем этот:

$$T_+(\omega, c) = \{(\lambda, y - x) : \lambda \leq \omega, y - x \geq c\} \cap T_+.$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Множество $T_+(\omega, c)$ замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Если $T_+(\omega, c)$ неограничено, то существует последовательность $\{(\lambda_k, y^k - x^k) \in T_+(\omega, c)$, такая, что либо $\lambda_k \to \infty$, либо $\|y^k - x^k\| \to \infty$. Однако $\lambda_k \leq \omega$, поэтому первый случай исключен. С другой стороны $y^k \geq y^k - x^k \geq c \geq 0$ поэтому предположение о том, что $\|y^k - x^k\| \to \infty$ влечет за собой $\|y^k\| \to \infty$.

В духе (4),(5) каждый член последовательности $\{(\lambda_k, y^k - x^k\}$, может быть разложен по базовым процессам, производящим определенные продукты:

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,k}, \quad y^k = \sum_{j=1}^{n} y^{j,k}, \quad x^k = \sum_{j=1}^{n} x^{j,k}, \tag{6}$$

где $(\lambda_{j,k}, x^{j,k}, y^{j,k}) \in T_J$. По определению $T_+(\omega, c)$ величины λ_k ограничены ω, а из неотрицательности $\lambda_{j,k}$ следует, что $\lambda_{j,k} \leq \omega$. Аналогично $y^{j,k} \leq y^k$ и $x^{j,k} \leq x^k$.

Нормируя (6) на $\|y^k\|$ и учитывая то, что каждое T_j является конусом, получаем

$$(\frac{\lambda_{j,k}}{\|y^k\|}, \frac{x^{j,k}}{\|y^k\|}, \frac{y^{j,k}}{\|y^k\|}) = (\tilde{\lambda}_{j,k}, \tilde{x}^{j,k}, \tilde{y}^{j,k}) \in T_j$$

где $\|\tilde{x}^{j,k}\| \leq 1, \|\tilde{y}^{j,k}\| \leq 1$. и $(\tilde{\lambda}_{j,k}, \tilde{x}^{j,k}, \tilde{y}^{j,k}) \in T_J$.

Переходя к пределу по $k \to \infty$ не ограничивая общности можно считать, что $y^k/\|y^k\| \to \tilde{y}$, $\tilde{x}^{j,k}/\|y^k\| \to \tilde{x}^j$, $\tilde{y}^{j,k}/\|y^k\| \to \tilde{y}^j$. Кроме этого, очевидно, $\lambda_{j,k} \to 0$.

Ввиду замкнутости T_j $(0, \tilde{x}^j, \tilde{y}^j) \in T_j$, откуда $\tilde{y}^j = 0$ в силу необходимости незаменимого ресурса λ. Соответственно $\tilde{y} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{y}^j = 0$, что противоречит $\|\tilde{y}\| = \lim_{k\to\infty} \|\tilde{y}^k\| = 1$. Полученное противоречие доказывает ограниченность $T_+(\omega, c)$.

Для того, чтобы доказать замкнутость предположим, что $(\lambda_k, y^k - x^k)$ — последовательность процессов из $T_+(\omega, c)$, такая, что $(\lambda_k, y^k - x^k) \to (\lambda, d)$ при $k \to \infty$. В силу ограниченности $T_+(\omega, c)$ можно считать, что и $\lambda_{j,k}, y^{j,k}, x^{j,k}$ в представлении (6) сходятся к некоторым пределам $\tilde{\lambda}_j, \tilde{y}^j, \tilde{x}^j$. Тогда $(\lambda, d) = \sum_{j=1}^{n} (\tilde{\lambda}_j, \tilde{y}^j - \tilde{x}^j)$, где $(\tilde{\lambda}_j, \tilde{y}^j, \tilde{x}^j) \in T_j$ в силу замкнутости T_j. Из эффективности (λ_k, y^k, x^k) следует, что $\lambda = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j \leq \omega, \sum_{j=1}^{n} (\tilde{y}^j - \tilde{x}^j) \geq c$, т.е. $(\lambda, d) \in T_+(\omega, c)$, что и требовалось доказать. ■

После того, как мы доказали компакность $T_+(\omega, c)$ мы можем находить эффективные процессы с помощью цен.

Лемма 2. *Пусть $p > 0$ и $(\lambda_\star, y^\star, x^\star)$ — решение задачи*

$$\max_{(\lambda, y, x) \in T_+(\omega, c)} p(y - x) - \lambda$$

тогда $(\lambda_\star, x^\star, y^\star)$ — эффективный в T_+ процесс.

Доказательство. . Очевидно, само $(\omega, c) \in T_+(\omega, c)$, и в силу оптимальности $p(y^\star - x^\star) - \lambda_\star \geq pc - \omega$ с

$$\lambda_\star \leq \omega, y^\star - x^\star \geq c. \tag{7}$$

Тогда, если в T_+ существует более эффективный процесс $(\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{y})$ то он должен удовлетворять условиям

$$\bar{\lambda} \leq \lambda_\star, \bar{y} - \bar{x} \geq y^\star - x^\star, \tag{8}$$

что в сочетании с (7) обеспечивает $(\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{y}) \in T_+(\omega, c)$

Если $(\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{y})$ отличается от $(\lambda_\star, x^\star, y^\star))$, то по крайней мере одно из неравенств (8) строгое и

$$p(\bar{y} - \bar{x}) - \bar{\lambda} < (p(y^\star - x^\star) - \lambda_\star,$$

что противоречит оптимальности $(\lambda_\star, x^\star, y^\star))$ и тому, что $(\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{y}) \in T_+(\omega, c)$. ■

Лемма 3. *Множество эффективных процессов T^e_+ — конус, т.е., если $(\bar\lambda, \bar y, \bar x)$ — эффективный процесс, то и $\theta(\bar\lambda, \bar y, \bar x)$ при $\theta \geq 0$ также эффективный.*

Доказательство. Действительно, если существует (λ', y', x'), эффективнее, чем $\theta(\bar\lambda, \bar y, \bar x)$, то

$$\lambda' \leq \theta\bar\lambda,\ y' - x' \geq \theta(\bar y - \bar x). \tag{9}$$

Предположим первоначально $\theta > 0$ и разделим неравенства (9) на θ:

$$\lambda'\theta^{-1} \leq \bar\lambda.\ y'\theta^{-1} - x'\theta^{-1} \geq \bar y - \bar x.$$

Ввиду эффективности $(\bar\lambda, \bar y, \bar x)$

$$\lambda' = \theta\bar\lambda, y' - x' = \theta(\bar y - \bar x)$$

и, следовательно, $(\lambda', y', x') = \theta(\bar\lambda, \bar y, \bar x)$. Если $\theta = 0$, то $\lambda' = 0$ влечет $y' = x' = 0$ и, следовательно, $(\lambda', y', x') = (0, 0, 0) = 0(\bar\lambda, \bar y, \bar x)$, что окончательно доказывает. ■

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема 4. *Если технология T продуктивна в том смысле, что T_+ содержит процесс с положительным чистым выпуском продукции, то существуют процессы $(1, \hat y_j, \hat x_j), j = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяющие следуюющим условиям:*

1. *Множество T^e_+ всех эффективных процессов (λ, y, x) из T_+ совпадает с конической оболочкой $(1, \hat y_j, \hat x_j), j = 1, 2, \ldots, n)$;*

2. *Для любого неотрицательного вектора конечного спроса d существует неотрицательное число λ, такое, что $(\lambda, d) \in T^e_+$.*

Доказательство. По предположению теоремы существует $(\mu, e) \in T_+$ с $e > 0$. Тогда в $T_+(\mu, e)$ есть эффективный процесс $(\bar\lambda, \bar y, \bar x)$, который, например, можно получить, максимизируя прибыль $p(y - x) - \lambda$ для некоторого $p > 0$. Очевидно, что при этом $\bar\lambda > 0$, иначе неравенству $\bar y - \bar x \geq e > 0$ невозможно было бы удовлетворить. По лемме 3 этот процесс можно перенормировать, сохраняя обозначения для пары "затраты-выпуск", и иметь дело с эффективным процессом $(1, \bar y, \bar x)$.

Как и любой процесс в T он может быть разложен по базовым процессам

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j,\ \bar y = \sum_{j=1}^{n} y^j,\ \bar x = \sum_{j=1}^{n} x^j$$

в духе разложений (4, 5). При этом в силу условий A,B должно быть $\lambda_j > 0$ для всех j. В противном случае, если для какого-то j' соответствующая доля ресурса $\lambda_{j'} = 0$, то $y^{j'} = 0$ и продукт j' просто не выпускается. Последнее противоречит $y^{j'} - x^{j'} \geq e^{j'} > 0$.

Отнормировав далее и сами базовые процессы (λ_j, y^j, x^j) получим набор $(1, \hat y^j, \hat x^j)$ соответствующим образом переобозначив y^j, x^j. Покажем, что это и есть искомый набор процессов, порождающих T^e_+.

Пусть матрица D составлена из столбцов $\hat y^j - \hat x^j, j = 1, 2, \ldots, n$

$$D = \|\hat y^j - \hat x^j, j = 1, 2, \ldots, n\| = \hat Y - \hat X$$

Коническую оболочку множества процессов $(1, \hat y^j - \hat x^j), j = 1, 2, \ldots, n$ с помощью матрицы D можно представить как множество векторов вида

$$(\sum_{j=1}^{n} s_j, \sum_{j=1}^{n} s_j(\hat y^j - \hat x^j)) = (\sigma(s), Ds),$$

где s — неотрицательный n-вектор, а $\sigma(s) = \sum_{j=1}^{n} s_j$.

Легко видеть, что $d_{ij} \leq 0$ для $i \neq j$, поскольку $\hat{Y}$ — диагональная матрица. Обозначив через l вектор, компонентами которого являются $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, n$, получим

$$\bar{y} - \bar{x} = Dl > 0.$$

Следовательно, в силу результатов раздела 2.1 матрица D положительно обратима.

В терминах матрицы D утверждение теоремы означает, что $T_+^e = \{(\sigma(s), Ds), s \geq 0\}$. Заметим, что $(\sigma(s), Ds) \in T+$, так как $\sigma(s) \geq 0$. Пусть $(\lambda, y - x) \in T_+^e$, тогда, положив $s = D^{-1}(y-x)$ получим $(\lambda, Ds) \in T_+^e$. В силу эффективности (λ, Ds) выполнено неравенство $\lambda \leq \sigma(s)$. Покажем, что на самом деле $\lambda = \sigma(s)$.

Действительно, пусть $\lambda < \sigma(s)$. Отнормировав оба процесса на $\sigma(s)$ можно считать, что $\sigma(s) = 1$ и, следовательно, наше предположение приобретает вид $\lambda < 1$. Так как $Dl = \bar{y} - \bar{x}$. а $Ds \geq 0$, то

$$c(\alpha) = (1-\alpha)Dl + \alpha\sigma(s) > 0$$

при $-\epsilon \leq \alpha < 0$ для достаточно малого $\epsilon > 0$. Соответственно

$$(1-\alpha)l + \alpha s = D^{-1}c(\alpha) > 0$$

причем

$$\sigma(c(\alpha)) = (1-\alpha)\sigma(l) + \alpha\sigma(s) = 1.$$

Поэтому $(1, c(\alpha)) \in T_+ \in$ и так как , то . Следовательно

где , в так как , то процесс более эффективен, чем , что противоречит предположению о его эффективности. Следовательно .

Доказательство обратного утверждения, что для любого существенно проще. Рассмотрим и некоторый еффективный процесс в нем. Последний можно представить в виде с . По эффективности

откуда, умножая на , получим или учитывая то, что , . Следовательно .

3 Динамические модели

3.1 Модель Леонтьева с внешним источником

Рассматривается система уравнений

$$x - Ax = d(t)$$

где $d(t), t = 1, 2, \dots$ - определяемая за пределами этой модели программа внешних поступлений (доходов).

Параллельно рассматривается и двойственная (ценовая) модель

$$p - pA = v$$

где $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) > 0$ — добавленные удельные стоимости продуктов. Вводя диагональную матрицу

$$V = \begin{vmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & v_n \end{vmatrix}$$

доходы q отраслей можно представить в виде $q = Vx$. Полученные доходы отрасли тратят на приобретение продукции других отраслей. В линейном приближении структура затрат j-ой отрасли на приобретение продуктов других отраслей может быть задата постоянными коэффициентами (долями) $c_{ij} \geq 0, \sum_i c_{ij} < 1$, которые в совокупности образуют матрицу C. Вектор затрат z по всем отраслям в этих условиях определяется как

$$z = Cq$$

.

Для отражения динамического характера модели будем считать, что

1. доход t-го года расходуется в $t+1$-ом году;

2. программа внешних доходов $d(t), t = 1, 2, \ldots$ задана apriori.

Соответственно полые расходы в момент $t+1$ составляют $Cq(t) + d(t+1)$ и вектор $w(t+1)$ конечного спроса на продукты отраслей удовлетворяет уравнению

$$Pw(t+1) = Cq(t) + d(t+1),$$

где P — диагональная матрица, порожденная векторм цен $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, Обозначим

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & p_n \end{vmatrix}, Q = P^{-1} = \begin{vmatrix} 1/p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/p_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1/p_n \end{vmatrix}$$

получим $w(t+1) = QCq(t) + Qd(t+1)$ и валовый выпуск в момент времени $t+1$ составляет

$$x(t+1) = (I-A)^{-1}w(z+1) = (I-A)^{-1}QCq(t) + (I-A)^{-1}Qd(t+1).$$

Умножая на V получим

$$q(t+1) = Vx(t+1) = Hq(t) + a(t)$$

где

$$H = V(I-A)^{-1}QC, a(t) = V(I-A)^{-1}Qd(t+1).$$

В силу неотрицательной обратимости $I - A$, имеющей место в силу продуктивности A, матрица $H \geq 0$ и вектор $a(t) \geq 0$ (по-компонентно) при $d(t+1) \geq 0$,

Особый интерес представляет случай сбалансированного роста $a(t) = \rho^t a, t = 0, 1, \ldots,$ где $a \geq 0$ — некоторый заданный вектор. Тогда при $q(t) = \rho^t q^0$

$$Hq^0 + a = \rho q^0$$

или

$$q^0 = (\rho I - H)^{-1}a$$

Пара

$$a(t) = \rho^t a, q(t) = \rho^t q^0$$

где $q^0 = (\rho I - H)^{-1}a$ составляет динамическое равновесное решение. Если в начальный момент времени пара a, q^0 удовлетроряет уравнению а внешние доходы растут с темпом ρ и по структуре соответствуют , то пара $a(t), q(t)$ остается в пропорциональном соотношении.

В общем-то необязательно начить процесс в точности с начального пложения q^0, можно показать, что при любом начальном приближении

$$\lim_{t\to\infty} q(t)\rho^{-t} = q^0$$

Действительно, пусть $a(t) = \rho^t a$ тогда

$$\rho q(t+1)\rho^{-(t+1)} = Hq(t)\rho^{-t} + a.$$

Так как $\rho q^0 - Hq^0 = a$, то

$$\rho u(t+1) = Hu(t) - Hq^0 + \rho q^0$$

или

$$\rho(u(t+1) - q^0) = H(u(t) - q^0)$$

где $u(t) = q(t)\rho^{-t}/$ или

$$\rho\delta u(t+1) = H\delta u(t),$$

где $\delta u(t) = u(t) - q^0$. Итерируя в обратном времени получаем

$$\delta u(t+1) = \rho^{-t}H^t w(1)$$

Так как $(\rho I - H)^{-1} \geq 0$, то $\rho^{-t}H^t \to 0$ при $t \to \infty$.. Последнее можно продемонстрировать с помощью следующей леммы.

Лемма 4. *Пусть $A \geq 0$ и $\rho I - A$ неотрицательно обратима. тогда $\rho > 0$ и $\rho^{-t}A^t \to 0, \sum_{t=0}^{\infty}\rho^{-t}A^t \to (\rho I - A)^{-1}$.*

Доказательство. Из неотрицательной обратимости следует, что все главные миноры $\rho I - A$ положительны. В частности $\rho - a_{11} > 0$, откуда $\rho > a_{11} \geq 0$. Если обозначить

$$\rho B_n = \sum_{t=0}^{n} \rho^{-t}A^t \geq 0$$

то

$$\rho B_n(\rho I - A) = \rho^2 B_n - \rho B_n A = \rho^2 B_n - \rho(B_{n-1}A + \rho^{-n}A^{n+1}).$$

Так как

Отсюда

$$B_n(\rho I - A) = \rho^2 I - \rho^{-n-1}A^{n+1} \leq \rho^2 I$$

или

$$B_n \leq \rho^2(\rho I - A)^{-1}.$$

Из монотонности B_n и ограниченности сверху следует утверждение леммы. ■

Применяя эту лемму получим

$$\delta u(t+1) = \rho^{-t}H^t\delta u(1) \to 0$$

или

$$q(t)\rho^{-t} \to q^0 = (\rho I - H)^{-1}a$$

где a — заданный профиль потребления,

Возникает интересный вопрос о занчении ρ, но полный ответ на этот вопрос дает теорема Фробениуса-Перрона.

3.2 Эффективный самоподдерживающийся рост

В этом разделе будет рассматриваться замкнутая экономика из конечного (n) числа продуктов, которые выступают как производимые, так и затрачиваемые. Динамика производства заключается в том, что продукты используются в производстве в момент времени t, а результаты становятся доступными в момент времени $t+1$. Таким образом условие реализуемости траектории экономического развития $x(t), t = 0, 1, \dots$ имеет вид $(x(t), x(t+1)) \in T$. Такую последовательность мы будем называть допустимой,

Также как и ранее для технологического множества T будем считать, что выполнены следующие предположения:

1. T — замкнутый выпуклый конус в $E_n^+ \times E_n^+$,
2. $(0, y) \in T$ влечет $y = 0$ (отсутствие "рога изобилия"),
3. для любого $x \geq 0$ существует $y \geq 0$ такое, что $(x, y) \in T$ (адаптируемость),
4. для любых $(x, y) \in T$ и такого (u, v), что $u \geq x$ и $(v \leq y$ выполняется $(u, v) \in T$ (свободное расходование),
5. для любых $(x', y') \in T$ и $(x'', y'') \in T$ и $\alpha > 0, \beta > 9, \alpha + \beta = 1$ существует $w > \alpha y' + \beta y'' \geq 0$ и $\alpha x' + \beta x'', w \in T$,

Последнее условие с математической точки зрения означает строгую выпуклость T.

Из условия адаптируемости следует, что допустимая траектория существует для любого начального S. На пространстве траекторий можно ввести отношение эффективности, которое мы будем понимать как $\{x'(t)\}_0^N \geq \{x''(t)\}_0^N$ если $x'(0) = x''(0)$ и $x'(N) \geq x''(N)$.

Обозначим $X(S.N)$ множество всех траекторий, $X(S, N) \subset S \times (E_n^+)^N = E$.

Свойства $X(S, N)$:

1. если S непусто и ограничено, то $X(S, N)$ также непусто и ограничено,
2. если S непусто, замкнуто и ограничено (компактно), то $X(S, N)$ также непусто и компактно,
3. если S — выпукло, то $X(S, N)$ также выпукло.

Непустота $X(S, N)$ следует из . Выпуклость $X(S, N)$ означает, что если $\{x'(t)\}_0^N \in X(S, N)$ и $\{x''(t)\}_0^N \in X(S, N)$, и $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ то $X(S, N)$. Это очевидным образом следует из того, что приведенные условия могут быть представлены в виде

$$(x'(t), x'(t+1)) \in T (x''(t), x''(t+1)) \in T$$

откуда $\alpha(x'(t), x'(t+1)) + \beta(x''(t), x''(t+1)) = (\alpha(x'(t), \alpha x'(t+1)) + (\beta(x''(t), \beta x''(t+1))) \in T$. Так как S выпукло, то и $\alpha x'(0) + \beta x''(0) \in S$, откуда $\{\alpha(x'(t), x'(t+1)) + \beta(x''(t)\}_0^N$.

Ограниченнность $X(S, N)$ следует из того, что если $X(S, N)$ неограничено, то существет $\bar{t}$ такое, что $(x^k(\bar{t}), x^k(\bar{t}+1)) \in T$, где $\|x^k(\bar{t}+1)\| = l_k \to \infty$, а $\|x^k(\bar{t})\| \leq C$. Такое $\bar{t}$ существует в силу ограниченнсти S. Разделив на l_k получим $(\bar{x}^k(\bar{t}), \bar{x}^k(\bar{t}+1)) \in T$, где $\bar{x}^k(\bar{t}) = x^k(\bar{t})/l_k \to 0$ а $\|\bar{x}^k(\bar{t}+1)\| = 1$. Переходя к пределу по $k \to \infty$ и выбирая $x^k(\bar{t}+1)) \to \tilde{x}(\bar{t}+1)$ получим $(0, \tilde{x}(\bar{t}+1)) \in T$, откуда $\tilde{x}(\bar{t}+1)$, что противоречит $\|\bar{x}^k(\bar{t}+1)\| = 1$,

Замкнутость $X(S, N)$ следует из замкнутости T: если $(x^k(t), x^k(t+1)) \in T \to (\tilde{x}(t), \tilde{x}(t+1))$ то $(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t+1)) \in T$. Если S замкнуто, то $\tilde{x}(0) \in S$ и, следовательно, .

Сбалансированный рост:

$$x(t+1) = \rho x(t), t = 0, 1, \dots$$

ρ — темп роста, $\rho - 1$ — норма роста. Иначе $x(t) = \rho^t x(0)$ и условие реализуемости траектории сбалансированного роста состоит в том, что $(x, \rho x) \in T$. Естественно наибольший интерес представляет $\mu = \sup \rho$.

Теорема 5. *Существует μ такое, что для любых $(x, \rho x) \in T$ выполняется неравенство $\rho \leq \mu$.*

Доказательство. Пусть $(x, y) \in T$ и $x \geq 0$ (т.е. $x \neq 0$). Обозначим

$$\rho(x, y) = \min_{x_i > 0} \frac{y_i}{x_i},$$

что представляет собой темп роста для пары (x, y). Покажем, что существует $x^\star, y^\star$ такие, что

$$\rho(x^\star, y^\star) = \mu = sup_{x!=0,(x,y)\in T} \rho(x, y).$$

Очевидно, что $\rho(i\alpha x, \alpha y) = \alpha\rho(x, y)$, поэтому можно считать, что $\|x\|_1 = \sum_i x_i = 1$ для нетривиальных процессов x В силу определения μ существует последовательность $\{(x^x, y^k)\} \subset T$ с $\|x^k\|_1 = 1$ такие, что $\rho(x^k, y^k) \to \mu$. Так как $x^k \subset \Delta_n \cap E_n^+$ и следовательно ограничены в совокупности, множество $\{y^k\}$ также ограничено и

$$y_i^k \geq \rho(x^k, y^k)x_i^k = \rho_k x_i.$$

Просуммировав по i получим $C \geq \sum_i y_i^k \geq \rho_k$, следовательно все ρ_k ограничены в совокупности. Выбрав соответствующие сходящиеся подпоследовательности можно считать, что $x^k \to \bar{x}, y^k \to \bar{y}, \rho_k \to \mu$, где $\bar{y} \geq \mu\bar{x}$ и $(\bar{x}, \bar{y}) \in T$. Остается доказать, что на самом деле существует $y^\star = \mu x^\star$ и эта траектория, начинающаяся с $x^\star$ реализует максимальный темп роста.

Для доказательства расссмотрим множество $T_\mu = \{(x, y), y \geq \mu x\}$. По построению $(\bar{x}, \bar{y}) \in T_\mu$, следовательно $T_\mu \neq \emptyset$. Очевидно, что это множество выпукло и компактно как пересечение.

Построим отображение множества T_μ в себя: $\phi : T_\mu \to T_m u$ как

$$\phi(x, y) = \frac{x + y}{\sum_i (x_i + y_i)} = \frac{x + y}{1 + \sum_i y_i} \leq \frac{(1 + \mu)x}{1 + \sum_i y_i} \geq 0.$$

для $(x, y) \in T_\mu$. Тогда

$$\phi(x, y) = \frac{(1 + \mu)x}{1 + \sum_i y_i} + u = \gamma x + u$$

с $u \geq 0, \gamma = \dfrac{(1 + \mu)x}{1 + \sum_i y_i}$. Так как T — конус, то $(\gamma x, \gamma y) \in T$ для $(x, y) \in T_\mu$ и существует $(u, v) \in T$ и

$$(\gamma x + u, \gamma y + v) = (\phi(x, y), \gamma y + v) \in T.$$

Следовательно

$$(\phi(x, y), \frac{(1 + \mu)x}{1 + \sum_i y_i} y + v)$$

отображает T_μ в себя. Поскольку $(u, v) \in T$ то множество v выпукло и, следовательно, $|Phi$ выпуклозначно. Отсюда следует, что в силу теоремы Какутани существует $(x^\star, y^\star) \in T_\mu$ такие, что

$$x^\star = \phi(x^\star, y^\star) = \frac{x^\star + y^\star}{1 + \sum_i y_i^\star}$$

Следовательно $y^\star = x^\star(\sum_i y_i^\star)$ и соответственно $\sum_i y_i^\star = \rho(x^\star, y^\star) \leq \mu$, с другой стороны $\sum_i y^\star \geq \mu \sum_i x_i^\star = \mu$ поэтому $y^\star = \mu x^\star$ и следовательно $(x^\star, \mu x^\star) \in T$. ■

Список литературы

[1] Леонтьев В.В. Избранные произведения: в 3 т. М.: Изд-во "Экономика", 2006-2007.

[2] Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика М: Мир.