

# Неподвижные точки — страшное оружие экономистов

Н.Е. Известный

Зурбаган, 16 сентября 2013 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Употребляемые понятия</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Существование неподвижных точек</b>	<b>4</b>
2.1	Сжимающие отображения . . . . .	4
2.2	Теорема Брауэра . . . . .	6
2.2.1	Гомеоморфизмы и клетки . . . . .	6
2.2.2	Несчастные случаи . . . . .	11
2.2.3	Симплициальные доказательства . . . . .	12
2.3	Теорема Какутани . . . . .	14
2.4	Другие обобщения . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Лемма Шпернера</b>	<b>20</b>
3.1	Триангуляции . . . . .	20
3.2	Пестрые симплексы . . . . .	22
3.3	Построение триангуляций . . . . .	23
3.3.1	Триангуляция $K_1$ . . . . .	24
3.3.2	Другие триангуляции . . . . .	26
3.4	Алгоритмика . . . . .	26
3.5	Построение стартового симплекса . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Приложения</b>	<b>28</b>
4.1	Модель чистого обмена . . . . .	28
4.2	Задача нелинейной комплементарности . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Вопросы на сообразительность</b>	<b>33</b>
<b>6</b>	<b>Практическая работа</b>	<b>33</b>

# 1 Употребляемые понятия

$E_n$  — конечномерное ( $n$ -мерное) вещественное пространство векторов  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  со скалярным произведением  $xy = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  и соответствующей нормой  $\|x\| = \sqrt{xx}$ . Если размерность пространства не имеет для нас никакого значения, такое пространство иногда будет обозначаться просто  $E$  или как иначе, без указания размерности.

Единичный шар в пространстве относительно нормы, индуцированной скалярным произведением, как правило будем обозначать  $U = \{x : \|x\| \leq 1\}$ . Иногда будет использоваться и чебышевская <sup>1</sup> норма  $\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|$ .

Пространство вещественных чисел  $E_1$ , следуя традиции, будем обозначать  $\mathbb{R}$ , множество неотрицательных чисел —  $\mathbb{R}_+$ . Аналогично  $E_+$  будет обозначать множество векторов с неотрицательными координатами.

умножение на число  $\alpha \in \mathbb{R}$  в  $E$  и сложение  $+ : E \times E \rightarrow E$  определим стандартным образом:

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n); \quad x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Соотношения  $a \leq b$  для  $a, b \in E$  и им подобные будем понимать по-координатно. Сумма двух множеств  $A \subset E$  и  $B \subset E$  понимается как множество  $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$ . Если одно из этих множеств — точка:  $A = \{a\}$ , то такую сумму будем записывать просто как  $a + B$ . Для вещественного числа  $\rho$  и множества  $A \subset E$  определим произведение  $\rho A = \{\rho a, a \in A\}$ .

Диаметром множества  $A$  называется

$$\text{diam}(A) = \sup_{a, a' \in A} \|a' - a\|.$$

Конечное подмножество  $A = \{a^1, a^2, \dots, a^m\} \subset E$  называется

**линейно независимым**, если для  $\lambda_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, m$  из

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k a^k = 0$$

следует  $\lambda_k = 0, k = 1, 2, \dots, m$ ;

**аффинно независимым**, если для  $\lambda_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, m$  из

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k a^k = 0, \quad \sum_{k=1}^m \lambda_k = 0,$$

следует  $\lambda_k = 0, k = 1, 2, \dots, m$ .

Например, в  $E_1 = \mathbb{R}$  любые два элемента (числа) линейно зависимы, а любые два *различных* элемента аффинно независимы.

Под выпуклой оболочкой множества  $A \subset E$  будем понимать множество

$$\text{co}(A) = \left\{ a = \sum_{k=1}^m \lambda_k a^k, \lambda_k \in \mathbb{R}_+, a^k \in A, k = 1, 2, \dots, m, \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1, m = 1, 2, \dots \right\}.$$

Знаменитая и безумно простая теорема Каратеодори <sup>2</sup> утверждает (см., например, [7], стр. 18), что в этом определении достаточно ограничиться  $m \leq n + 1$ , где  $n$  — размерность пространства  $E$ . Выпуклое множество совпадает со своей выпуклой оболочкой.

<sup>1</sup>[http://ru.wikipedia.org/wiki/Чебышёв,\\_Пафнутий\\_Львович](http://ru.wikipedia.org/wiki/Чебышёв,_Пафнутий_Львович)

<sup>2</sup><http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Caratheodory.html>

Выпуклая оболочка множества  $A$  обладает еще одним интересным свойством, которое обнаружил замечательный венгерский математик Lipot Fejer:<sup>3</sup> она состоит из точек, в определенном смысле "ближайших" к множеству  $A$ . Точнее,  $x \in \text{co}\{A\}$  тогда и только тогда, когда для любого  $y$  существует  $a_y \in A$ , такое, что  $\|y - a_y\| \geq \|x - a_y\|$ .

Другими словами, если обозначить через  $\phi_A(x, y) = \max_{a \in A} (\|y - a\| - \|x - a\|)$ , то для  $x \in \text{co}\{A\}$  функция  $\phi_A(x, y)$  неотрицательна для всех  $y$ . Заметим, что  $\phi_A(x, x) = 0$  для всех  $x$ . Поиск таких  $x$ , что  $\phi_A(x, y) \geq 0$  для всех  $y$  при общей функции  $f$ , обращающейся в нуль на диагонали  $E \times E$  представляет собой предмет *равновесного* программирования.

Аффинной оболочкой  $\text{aff}\{A\}$  множества  $A$  называется множество

$$\text{aff}\{A\} = \left\{ a = \sum_{i=1}^m \lambda_i a^i, a^i \in A, \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, m = 1, 2, \dots \right\}.$$

Так же, как и в теореме Каратеодори, в этом определении можно ограничиться  $m \leq n + 1$ .

Внутренность множества  $A$  будем обозначать  $\text{int } A$ . Для выпуклых множеств будет использоваться также и понятие относительной внутренней  $\text{ri } A$  как внутренней множества  $A$  относительно наименьшего аффинного подпространства, содержащего  $A$ . Формальное определение относительной внутренней выглядит следующим образом.

**Определение 1** Точка  $x \in \text{ri}\{A\}$  тогда и только тогда, когда существует  $\epsilon > 0$  такое, что

$$x + \epsilon U \cap \text{aff}\{A\} \subset A.$$

Замечательный результат выпуклого анализа заключается в том, что любое выпуклое множество имеет непустую относительную внутренность.

Наряду с точками и множествами мы будем рассматривать и отображения, т.е. в общем случае отображение  $f$  из множества  $A$  в множество  $B$ , обозначаемое  $f : A \rightarrow B$  представляет собой совокупность пар  $(a, f(a))$ ,  $a \in A$ , а  $f(a) \in B$ .

Если  $A = B$  и точка  $a^*$  такова, что для заданного отображения  $f : A \rightarrow A$  выполнено  $f(a^*) = a^*$ , то точка  $a^*$  называется неподвижной точкой  $f$ .

Если отображение  $f$  действует из  $A$  в  $B$ , т.е.  $f : A \rightarrow B$ , а отображение  $g$  действует из  $B$  в  $C$ , т.е.  $g : B \rightarrow C$ , то отображение  $h : A \rightarrow C$ , определяемое соотношением  $h(a) = g(f(a))$  называется суперпозицией  $f$  и  $g$  и обозначается  $h = g \circ f$ .

---

<sup>3</sup><http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Fejer.html>

## 2 Существование неподвижных точек

В этой лекции мы рассмотрим вопросы существования неподвижных точек для различных классов отображений. Для сжимающих отображений будет дано исчерпывающее исследование предмета, для более общего случая на этом этапе мы сформулируем основной результат и укажем его эквивалентные формы. Одно из доказательств, использующее идеи комбинаторной топологии, будет приведено в последующей лекции.

### 2.1 Сжимающие отображения

Одним из наиболее известных результатов, относящихся к неподвижным точкам, является принцип сжимающих отображений С. Банаха<sup>4</sup>. Этот принцип утверждает, что

Если отображение  $f : E \rightarrow E$  сжимающее, т.е.  $\|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\|$  в некоторой норме  $\|\cdot\|$  для какого-то  $q \in [0, 1)$  и любых  $x, y$ , то у отображения  $f$  есть единственная неподвижная точка  $x^*$  такая, что  $x^* = f(x^*)$ .

**Доказательство.** Заметим сразу, что из свойства сжимаемости следует равномерная непрерывность  $f$ . Действительно, для любого  $\epsilon > 0$  достаточно выбрать  $\delta_\epsilon = \epsilon/q$  и это  $\delta_\epsilon$  будет обеспечивать  $\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$  для любых  $x, y$  таких, что  $\|x - y\| \leq \delta_\epsilon$ .

Дальнейшее доказательство можно считать конструктивным: выберем некоторую произвольную начальную точку  $x^0$  и построим последовательность  $\{x^k\}$  по правилу

$$x^{k+1} = f(x^k), k = 0, 1, \dots$$

Если у последовательности  $\{x^k\}$  существует предел  $x^*$ , то, очевидно,  $x^* = f(x^*)$ .

Доказательство существования и единственности этого предела можно начать с доказательства ограниченности последовательности  $\{x^k\}$ . Последнее следует из того, что

$$q\|x\| \geq \|f(x) - f(0)\| \geq \|f(x)\| - \|f(0)\|,$$

откуда  $\|f(x)\| \leq q\|x\| + \|f(0)\|$ . Применяя это соотношение для  $x = x^k$  получаем

$$\|x^{k+1}\| \leq q\|x^k\| + \|f(0)\| \leq q(q\|x^{k-1}\| + \|f(0)\|) + \|f(0)\| = q^2\|x^{k-1}\| + \|f(0)\|(1+q).$$

Продолжая эту обратную рекурсию до начала процесса, получим

$$\|x^k\| \leq q^{k+1}\|x^0\| + \|f(0)\| \sum_{m=0}^k q^m = q^{k+1}\|x^0\| + (1 - q^{k+1})\|f(0)\|/(1 - q) = q^{k+1}(\|x^0\| - \|f(0)\|/(1 - q)) + \|f(0)\|/(1 - q). \quad (1)$$

Если  $f(0) = 0$ , то очевидно  $x^k \rightarrow 0$  и 0 является неподвижной точкой и теорема доказана. Поэтому далее рассмотрим случай  $f(0) \neq 0$  и, следовательно,  $\|f(0)\| > 0$ .

Так как  $q^{k+1} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то для достаточно больших  $k$

$$\|x^k\| \leq q^{k+1}(\|x^0\| - \|f(0)\|/(1 - q)) + \|f(0)\|/(1 - q) \leq 2\|f(0)\|/(1 - q) = r_0$$

при  $\|f(0)\| > 0$  и следовательно, вся последовательность  $\{x^k\}$  содержится в ограниченном шаре радиуса  $r_0$ . Случай  $\|f(0)\| = 0$  интереса не представляет, поскольку при этом 0 уже является неподвижной точкой.

Также легко можно показать, что  $\|x^{k+1} - x^k\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Действительно

$$\|x^{k+1} - x^k\| = \|f(x^k) - f(x^{k-1})\| \leq q\|x^k - x^{k-1}\|,$$

---

<sup>4</sup><http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Banach.html>

откуда, опять итерируя в обратном времени, получим оценку

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq q^k \|x^1 - x^0\| \leq q^k \|f(x^0) - x^0\| \leq q^k (\|f(x^0)\| + \|x^0\|) \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ , что и требовалось доказать.

Далее немедленно следует, что если подпоследовательность  $\{x^{n_k}\} \rightarrow x^*$ , то и  $\{x^{n_k+1}\} \rightarrow x^*$  и, следовательно,

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{n_k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x^{n_k}) = f(x^*)$$

и  $x^*$  является неподвижной точкой.

Единственность предельной точки следует из следующих рассуждений. Если существуют две подпоследовательности  $\{x^{p_k}\}$  и  $\{x^{q_k}\}$  такие, что  $x^{p_k} \rightarrow x'$  и  $x^{q_k} \rightarrow x'' \neq x'$ , при  $k \rightarrow \infty$ , то по доказанному выше и  $f(x^{p_k}) \rightarrow x'$  и  $f(x^{q_k}) \rightarrow x''$ . Так как

$$\|f(x^{p_k}) - f(x^{q_k})\| \leq q \|x^{p_k} - x^{q_k}\|$$

то переходя к пределу по  $k \rightarrow \infty$  получим  $\|x' - x''\| \leq q \|x' - x''\|$ , что возможно только при  $x' = x''$ . ■

Экономическим приложением этого принципа может служить статическая модель межотраслевого баланса Леонтьева (см., например, [4]). Эта модель рассматривает экономику из  $n$  продуктов как систему балансов

$$x = Ax + c, \tag{2}$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — валовые выпуски,  $0 \leq c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  — конечный спрос, а  $A = \|a_{ij}\|$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  — матрица неотрицательных технологических коэффициентов. Если ввести норму  $\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|$  то при выполнении условия Соллоу

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq q < 1$$

отображение  $f(x) = Ax + c$  является сжимающим:

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty = \|A(x - y)\|_\infty \leq \|x - y\|_\infty \left( \max_{i=1,2,\dots,n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \leq q \|x - y\|_\infty$$

и, следовательно, существует  $x^*$  такой, что  $x^* = Ax^* + c$ . Неотрицательность  $x^*$  следует из того, что для  $x \geq 0$  и  $f(x) \geq 0$ . Поэтому все вектора последовательности, например,  $c, f(c), f(f(c)), \dots \rightarrow x^*$  неотрицательны, следовательно, неотрицателен и предел  $x^*$ .

Таким образом точка  $x^*$  представляет собой решение системы балансов (2), имеющее экономический смысл и описываемая этими уравнениями экономика способна обеспечить как свой внутренний технологический спрос, так и заданное конечное потребление  $c$ .

## 2.2 Теорема Брауэра

Предметом этого раздела лекции является знаменитая теорема Брауэра <sup>5</sup>:

**Теорема 1** Пусть  $C$  — замкнутая  $n$ -клетка и отображение  $f : C \rightarrow C$  непрерывно. Тогда существует  $x^* \in C$  такая, что  $f(x^*) = x^*$ .

Эта точка ( $x^*$ ) называется неподвижной точкой отображения  $f$ .

Существует так называемая сильная версия теоремы Брауэра, которая утверждает, что при некоторых дополнительных предположениях невырожденности существует *нечетное* число неподвижных точек. Более того, существует и *сверхсильная* версия, которая использует некоторое дополнительное понятие ориентации неподвижной точки.

Все три версии этой теоремы проиллюстрированы на Рис. 1 где функция  $f(x)$  отоб-

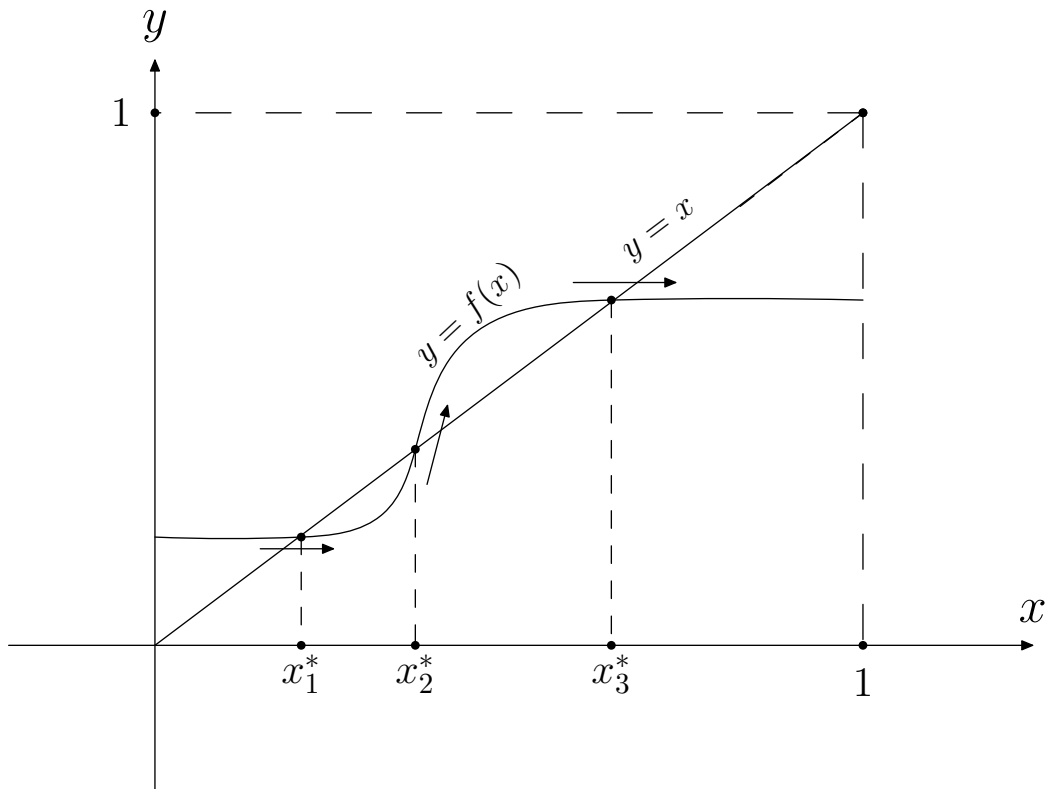


Рис. 1: Три версии теоремы Брауэра.

ражает отрезок  $[0, 1]$  по оси  $Ox$  в отрезок  $[0, 1]$  по оси  $Oy$ . Оставляя точное определение на потом, заметим, что отрезок  $[0, 1]$  является  $n$ -клеткой по определению, а отображение  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  очевидно непрерывно и отображает этот отрезок в себя. Пересечение прямой линии  $y = x$  с графиком  $f(x)$  дает неподвижные точки и на Рис. 1 видно 3 (нечетное число — теорема Брауэра в сильной версии) неподвижных точек, каждая из которых соответствует переходу графика  $f(x)$  либо сверху вниз (точки  $x_1^*$  и  $x_3^*$ ), либо снизу вверх (точка  $x_2^*$ ). Как видно, количество переходов сверху вниз на единицу больше количества переходов снизу вверх — сверхсильная версия теоремы Брауэра.

### 2.2.1 Гомеоморфизмы и клетки

Чтобы понять теорему Брауэра требуется пояснить используемое в ней понятие  $n$ -клетки  $C$ . По сути дела, это понятие обобщает понятие точки, для которой теорема Брауэра стано-

<sup>5</sup>Brower, Luitzen Egbertus Jan [http://en.wikipedia.org/wiki/L.\\_E.\\_J.\\_Brouwer](http://en.wikipedia.org/wiki/L._E._J._Brouwer)

вится тривиальной. Интеллектуальное достижение Брауэра состоит в том, что он доказал существование неподвижной точки для отображений, действующих в пределах более общих объектов.

Прежде чем определить  $n$ -клетку, введем другое понятие, которое будет использоваться в ее определении и других конструкциях.

**Определение 1** *Отображение  $h : A \rightarrow B$  называется гомеоморфизмом, если*

1.  $h$  непрерывно и имеет непрерывное обратное отображение  $h^{-1}$ .
2. Отображение  $h$  отображает  $A$  на  $B$ :  $h(A) = \{h(a), a \in A\} = B$ .

Эти свойства гомоморфизмов проиллюстрированы на Рис. 2. где подчеркивается, что пря-

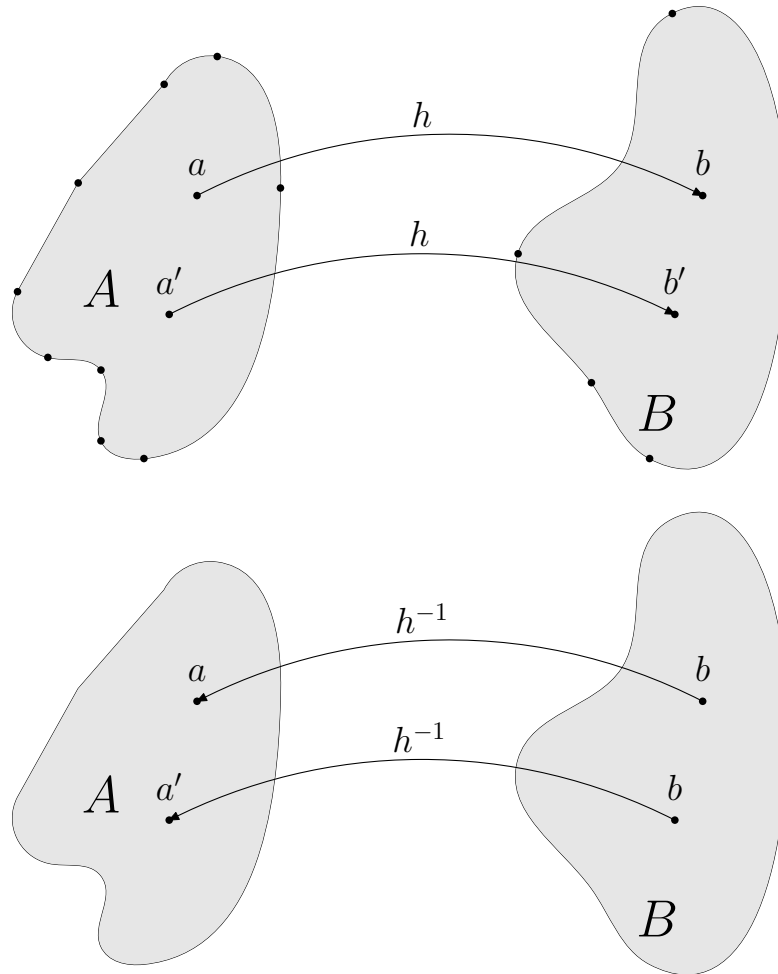


Рис. 2: Свойства гомоморфизмов.

мое отображение  $h$  определено для всех  $a \in A$  и различным  $a$  соответствуют различные  $b = h(a)$ . Кроме этого, обратное отображение  $h^{-1}$  определено для всех  $b \in B$  и также различным  $b$  соответствуют различные  $a = h^{-1}(b)$ . Последнее, впрочем, не является независимым свойством, а следует из приведенного свойства взаимной однозначности прямого отображения. Следует также обратить внимание на требование непрерывности как прямого, так и обратного отображения: близким  $a$  и  $a'$  соответствуют близкие  $h(a)$  и  $h(a')$ , аналогично и для  $h^{-1}$ .

Понятие гомеоморфизма нужно для определения типов множеств, в которых будем искать неподвижные точки. Как легко показать, вопрос существования неподвижной точки для непрерывных отображений в гомеоморфных множествах эквивалентен. А именно, если для произвольных непрерывных отображений существование неподвижной точки гарантируется для некоторого множества, то такое же существование неподвижной точки гарантируется и для всех множеств, гомеоморфных ему.

Действительно, пусть множество  $C$  таково, что для любого непрерывного  $f$ , отображающего  $C$  в себя, существует неподвижная точка  $x_f^*$ . Теперь рассмотрим множество  $D$ , гомеоморфное  $C$ , т.е. пусть  $h : C \rightarrow D$  — некоторый гомеоморфизм  $C$  и  $D$ . При этом непрерывное отображение  $f = h \circ g \circ h^{-1}$  отображает  $C$  в  $C$  и, следовательно, имеет неподвижную точку  $x_f^*$ . Тогда  $y_g^* = h^{-1}(x_f^*) \in D$  и

$$g(y_g^*) = g \circ h^{-1}(x_f^*) = h^{-1} \circ h \circ g \circ h^{-1}(x_f^*) = h^{-1} \circ f(x_f^*) = h^{-1}(x_f^*) = y_g^*$$

то есть  $y_g^*$  является неподвижной точкой отображения  $g$ . Это рассуждение не только доказывает существование неподвижной точки  $y$   $g$ , но и дает конкретный способ ее вычисления, если, конечно, вы можете находить неподвижные точки произвольных непрерывных отображений на  $C$ .

**Определение 2** Множество  $C$  называется замкнутой  $n$ -клеткой, если существует такой гомеоморфизм  $h$ , который отображает единичный шар  $U$   $n$ -мерного пространства  $E_n$  на  $C$ .

На самом деле понятие клетки достаточно широкое. В частности, оно включает в себя выпуклые множества с непустой внутренностью.

**Лемма 1** Замкнутое выпуклое ограниченное множество  $C$  с непустой внутренностью в  $n$ -мерном пространстве  $E_n$  является  $n$ -клеткой.

**Доказательство.** Чтобы показать это, построим гомеоморфизм  $h$ , отображающий  $C$  на  $U$ . Пусть  $c^0$  — внутренняя точка  $C$ . Тогда существует некоторое  $\rho > 0$  такое, что  $c^0 + \rho U \subset C$ . Очевидно, что  $c^0 + \rho U$  непрерывно и взаимно-однозначно отображается на единичный шар  $U$  простым масштабированием и сдвигом

$$s(c) = (c - c^0)/\rho \in U \text{ для всех } c \in c^0 + \rho U.$$

Легко видеть, что и обратное отображение

$$s^{-1}(x) = c^0 + \rho x, x \in U$$

также непрерывна и, следовательно,  $s$  — гомеоморфизм.

Если построить гомеоморфизм  $g$  отображающий  $c^0 + \rho U$  на  $C$ , то суперпозиция  $h = g \circ s^{-1}$  будет гомеоморфизмом  $U$  и  $C$ . Такой гомеоморфизм легко строится с помощью функции Минковского <sup>6</sup>

$$\mu_C(x) = \inf \mu : c^0 + \frac{1}{\mu} x \in C, \mu > 0. \quad (3)$$

Легко проверить, что функция Минковского положительно однородна:

$$\mu_C(\theta x) = \theta \mu_C(x) \text{ при } \theta > 0$$

---

<sup>6</sup>К счастью, не той "чертовой лестницей"  $\mu_C(x)$ , которой Минковский ([http://ru.wikipedia.org/wiki/Минковский,\\_Герман](http://ru.wikipedia.org/wiki/Минковский,_Герман)) знаменит среди более теоретически настроенных математиков.



и  $\mu_C(x) \leq 1$  для  $x$  таких, что  $c^0 + x \in C$ . Кроме этого  $\mu_C$  субаддитивна:

$$\mu_C(x + y) \leq \mu_C(x) + \mu_C(y).$$

что важно для установления других ее свойств.

Субаддитивность можно показать следующим образом: пусть  $\bar{C}$  - замыкание  $C$ . Тогда по определению  $c^0 + x/\mu_C(x) = x' \in \bar{C}$  и  $c^0 + y/\mu_C(y) = y' \in \bar{C}$ . Положим  $0 \leq \alpha = \mu_C(x)/(\mu_C(x) + \mu_C(y)) \leq 1$ , при этом

$$\alpha x' + (1 - \alpha)y' = c^0 + \frac{x + y}{\mu_C(x) + \mu_C(y)} \in \bar{C}.$$

Поэтому

$$1 \geq \mu_C(\alpha x' + (1 - \alpha)y') = \mu_C\left(\frac{x + y}{\mu_C(x) + \mu_C(y)}\right) = \frac{\mu_C(x + y)}{\mu_C(x) + \mu_C(y)}$$

и, следовательно,  $\mu_C(x + y) \leq \mu_C(x) + \mu_C(y)$ .

Из субаддитивности и положительной однородности следует выпуклость  $\mu_C(x)$ , а если множество  $C$  имеет непустую внутренность  $\text{int } C$  и  $c^0 \in \text{int } C$ , то  $\mu_C(x)$  и конечна, т.е. для любых  $x$  функция  $\mu_C(x) < \infty$ . При этом из общих результатов выпуклого анализа [3] следует, что  $\mu_C(x)$  непрерывна.

Используя функцию Минковского определим для  $c \in c^0 + \rho U$  отображение

$$g(c) = c^0 + \rho \frac{\mu_C(c - c^0)}{\|c - c^0\|} (c - c^0) = c^0 + \rho \mu_C \left( \frac{c - c^0}{\|c - c^0\|} \right) (c - c^0) \quad (4)$$

Из непрерывности  $\mu_C(x)$  следует, что она равномерно ограничена на  $U$  и, следовательно, существует  $M$  такое, что  $\mu_C \left( \frac{c - c^0}{\|c - c^0\|} \right) \leq M$  для всех  $c \in C, c \neq c^0$ . Тогда, доопределив  $g(c^0) = c^0$  получим

$$\begin{aligned} \|g(c) - g(c^0)\| &= \|g(c) - c^0\| = \rho \frac{\mu_C(c - c^0)}{\|c - c^0\|} \|c - c^0\| = \\ &= \rho \mu_C \left( \frac{c - c^0}{\|c - c^0\|} \right) \|c - c^0\| \leq \rho M \|c - c^0\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $c \rightarrow c^0$ , что доказывает непрерывность  $g(c)$ .

Заметим, что при  $c \neq c^0$

$$g(c) - c^0 = \rho \mu_C(c - c^0) \frac{c - c^0}{\|c - c^0\|} = \gamma \frac{c - c^0}{\|c - c^0\|} = \|g(c) - c^0\| \frac{c - c^0}{\|c - c^0\|}$$

и, следовательно,

$$\frac{g(c) - c^0}{\|g(c) - c^0\|} = \frac{c - c^0}{\|c - c^0\|}, \quad (5)$$

что, собственно говоря, очевидно и из геометрических соображений, поскольку правая и левая части равенства (5) представляют собой однонаправленные вектора единичной длины. Соответственно

$$\frac{\mu_C(g(c) - c^0)}{\|g(c) - c^0\|} = \mu_C \left( \frac{g(c) - c^0}{\|g(c) - c^0\|} \right) = \mu_C \left( \frac{c - c^0}{\|c - c^0\|} \right) = \frac{\mu_C(c - c^0)}{\|c - c^0\|}$$

и, следовательно, (4) можно переписать в виде

$$g(c) = c^0 + \rho \frac{\mu_C(g(c) - c^0)}{\|g(c) - c^0\|} (c - c^0),$$

что дает возможность обратить (4):

$$c(g) = c^0 + \frac{\|g - c^0\|}{\rho\mu_C(g - c^0)}(g - c^0) \quad (6)$$

Используя (4) можно отобразить  $C \rightarrow c^0 + \rho U$ , а используя (6) можно отобразить  $c^0 + \rho U \rightarrow C$ , причем эти отображения являются взаимнообратными. ■

В дальнейшем мы будем использовать множество  $C_n = \{x : 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0\}$ . Можно непосредственно проверить его выпуклость, а точка  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  с  $\bar{x}_i = (n + \frac{1}{2} - i)/n = 1, 2, \dots, n$  является его внутренней точкой. Следовательно, это выпуклое множество с непустой внутренностью является  $n$ -клеткой.

Его выдающаяся роль в теории неподвижных точек объясняется тем, что это множество можно очень просто гомеоморфно отобразить в еще более выдающее: стандартный симплекс

$$\Delta_n = \{\xi_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n; \sum_{i=0}^n \xi_i = 1\} \subset E_{n+1}.$$

Помимо стандартных симплексов в теории неподвижных точек широко используются и их обобщения — просто симплексы  $\Delta(\mathcal{A})$ , где  $\mathcal{A} = (a^1, a^2, \dots, a^m)$  — набор из  $m$  аффинно независимых векторов. Сам симплекс  $\Delta(\mathcal{A})$  определяется как выпуклая оболочка  $\mathcal{A}$ :

$$\Delta(\mathcal{A}) = \text{co}(\mathcal{A}) = \{a = \sum_{k=1}^m \lambda_k a^k, \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1\}.$$

Очевидно, что стандартный  $n$ -мерный симплекс  $\Delta_n = \Delta(\mathcal{A})$ , где  $\mathcal{A} = \{a^k, k = 1, 2, \dots, n+1\}$  и

$$a^k = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1 \text{ раз}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k+1 \text{ раз}})$$

— орты пространства  $E_{n+1}$ .

Множества  $C_n$  и  $\Delta_n$  гомеоморфны в том плане, что можно построить между ними гомеоморфное отображение. Такой гомеоморфизм  $h$ , можно определить соотношениями  $h : C_n \rightarrow \Delta_n$ :

$$\xi_0 = 1 - x_1; \quad \xi_i = x_{i+1} - x_i, i = 1, 2, \dots, n-1; \quad \xi_n = x_n$$

и  $h^{-1} : \Delta_n \rightarrow C_n$ :

$$x_i = 1 - \sum_{j=0}^{i-1} \xi_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Покажем что выполнена следующая лемма.

**Лемма 2** *Если теорема Брауэра верна для  $\Delta_n$ , то она верна для произвольной  $n$ -клетки  $C$ .*

**Доказательство.** Действительно, пусть  $f$  — непрерывное отображения клетки  $C$  в себя, а  $p, q, r$  — последовательность гомеоморфизмов, переводящих

$$\Delta_n \rightarrow C_n \rightarrow U \rightarrow C.$$

Обозначив суперпозицию этих гомеоморфизмов через  $h$  получаем  $f : h(\Delta_n) \rightarrow h(\Delta_n)$  и, следовательно,

$$h^{-1} \circ f \circ h : \Delta_n \rightarrow \Delta_n.$$

Отображение  $h^{-1} \circ f \circ h$  непрерывно и по предположению имеет в  $\Delta_n$  неподвижную точку  $x^*$ :

$$h^{-1} \circ f \circ h(x^*) = x^*.$$

Отсюда

$$y^* = h(x^*) = h \circ h^{-1} \circ f \circ h(x^*) = f \circ h(x^*) = f(y^*),$$

т.е.  $y^* = h(x^*)$  является неподвижной точкой  $f$ . ■

### 2.2.2 Несчастные случаи

В случае размерности  $n = 1$  теорема Брауэра следует из теоремы Вейерштрасса <sup>7</sup>.

Действительно, в этом случае  $\Delta_1$  гомеоморфен отрезку вещественной оси  $C_1 = [0, 1]$ . Прямым отображением гомеоморфизма  $h : C_1 \rightarrow \Delta_1$  будет, например,  $h(\alpha) = (\alpha, 1 - \alpha) \in \Delta_1$  при  $0 \leq \alpha \leq 1$ , а обратным отображением  $h^{-1} : \Delta_1 \rightarrow C_1$  будет проекция симплекса  $\Delta_1$  на ось  $Ox$ :

$$h^{-1}(s) = h^{-1}((s_x, s_y)) = s_x \in C_1,$$

поскольку, если  $s = (s_x, s_y) \in \Delta_1$ , то  $s_y = 1 - s_x$  и  $0 \leq s_x \leq 1$ .

Ранее мы фактически убедились, что существование неподвижных точек в гомеоморфных множествах — это по сути дела эквивалентные проблемы. В самом деле, если для некоторого отображения  $g : C_1 \rightarrow C_1$ , имеющего вид  $g = h \circ f \circ h^{-1}$  есть неподвижная точка  $\alpha_*$ , то у отображения  $\tilde{g} = h^{-1} \circ g \circ h = f : \Delta_1 \rightarrow \Delta_1$  есть неподвижная точка  $s^* = h^{-1}(\alpha_*)$  на  $\Delta_1$ .

Если  $g : C_1 \rightarrow C_1$ , то  $g(0) \geq 0$  и  $g(1) \leq 1$ . При  $g(0) = 0$  или  $g(1) = 1$  соответствующий конец отрезка уже является неподвижной точкой и теорема Брауэра доказана. Если  $g(0) > 0$  и  $g(1) < 1$ , то функция  $d(x) = g(x) - x$  принимает на концах отрезка  $[0, 1]$  разные знаки и, следовательно, в силу теоремы Вейерштрасса, существует точка  $\alpha_* \in (0, 1)$  такая, что  $d(\alpha_*) = 0 = g(\alpha_*) - \alpha_*$  т.е.  $\alpha_*$  является неподвижной точкой  $g$ .

Сильная версия теоремы Брауэра, также очевидная для этого случая при отсутствии "прилипаний"  $g(x)$  к диагонали, утверждает, что число точек пересечения графиков прямой  $y = x$  и функции  $y = g(x)$  при условии  $g : C_1 \rightarrow C_1$  будет нечетно, а сверхсильная версия утверждает, что количество пересечений "сверху-вниз" будет на единицу больше, чем "снизу вверх". К сожалению, эти рассуждения не обобщаются на более высокие размерности.

В случае более высоких размерностей может быть применена другая идея. Пусть  $f : U \rightarrow U$  и  $f(x) - x \neq 0$  ни для какого  $x \in U$ . Тогда можно построить непрерывное отображение любой точки  $x \in U$  в границу шара  $\partial U$ :

$$h(x) = x + \lambda_x(x - f(x))$$

где  $\lambda_x = \min \lambda : \|x + \lambda(x - f(x))\| = 1$ . В силу того, что  $f(x) - x \neq 0$  такое  $\lambda_x$  всегда существует.

При этом отображение  $h$  оставляет неподвижными точки границы и, следовательно, отображает непрерывным образом шар  $U$  в многообразие меньшей размерности  $\partial U$ , что невозможно, как показал тот же Брауэр и развили потом многие выдающиеся математики [5]. Это рассуждение применимо, как мне кажется, для любой размерности, однако неконструктивно и не дает никаких алгоритмических идей.

<sup>7</sup><http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Weierstrass.html>

### 2.2.3 Симплициальные доказательства

Для того, чтобы получить некоторые алгоритмы, мы рассмотрим другой подход, основанный на симплициальных разбиениях  $\Delta_n$ . В его основе лежит сведение теоремы Брауэра к лемме Кнастера-Куратовского-Мазуркевича (ККМ).<sup>8</sup> В качестве вводного, как и выше, рассмотрим пример размерности  $n = 1$ . Пусть  $f$  непрерывно отображает  $\Delta_1$  в себя:  $f : \Delta_1 \rightarrow \Delta_1$ . Обозначим

$$C_1 = \{x : f_1(x) \leq x_1\}, \quad C_2 = \{x : f_2(x) \leq x_2\},$$

Заметим, что  $\Delta_1 = C_1 \cup C_2$ . Действительно, если существует такое  $\bar{x}$ , что  $\bar{x} \notin C_1$  и  $\bar{x} \notin C_2$ , то это означает, что  $f_1(\bar{x}) > \bar{x}_1$  и  $f_2(\bar{x}) > \bar{x}_2$ . Складывая эти два строгие неравенства получим противоречие:

$$1 = f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) > \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 1.$$

Кроме этого заметим, что если  $x^* \in C_1 \cap C_2$ , то  $x^*$  — неподвижная точка  $f$  на  $\Delta_1$ .

На самом деле, если  $x^* \in C_1$  и  $x^* \in C_2$ , то

$$1 = f_1(x^*) + f_2(x^*) \leq x_1^* + x_2^* = 1.$$

и на самом деле все неравенства должны быть равенствами

$$f_1(x^*) = x_1^*, \quad f_2(x^*) = x_2^*,$$

то есть  $x^*$  — неподвижная точка  $f$  на  $\Delta_1$ .

Это рассуждение сводит проблему существования неподвижной точки к непустоте пересечения множеств  $C_1$  и  $C_2$  и далее мы покажем, что такое пересечение всегда непусто.

Пусть  $\mathcal{N} = \{1, 2\}$  и  $I \subset \mathcal{N}$ . Обозначим:  $\Delta_n^I = \Delta_n \cap \{x_i = 0, i \in I\}$ . При  $I = \{i\}$  мы будем писать просто  $\Delta_n^i$ .

Прежде всего заметим, что если  $\Delta_1^1 = (0, 1) = e^2 \subset C_1$ , то  $0 \leq f_1(e^2) \leq 0$ , то есть  $f_1(e^2) = 0$  и поэтому  $f_2(e^2) = 1 - f_1(e^2) = 1$ . Следовательно,  $e^2 = f(e^2)$  — неподвижная точка сама по себе. Аналогично, если  $\Delta_1^2 = (1, 0) = e^1 \subset C_2$ , то  $e^1$  также неподвижная точка. Исключая эти два тривиальных случая предположим, что  $e^1 \in C_1$  и  $e^2 \in C_2$ .

Симплекс  $\Delta_1$  (отрезок) можно разделить на  $K$  подсимплексов (также отрезков) длины  $1/K$ . Эта процедура тривиальна для размерности  $n = 1$ , но с соответствующим обобщением она может быть проделана и в более высоких размерностях. Каждую точку полученного разбиения можно пометить числом 1 или 2 в зависимости от того, принадлежит она множеству  $C_1$  или  $C_2$ . Если какая-либо из точек принадлежит одновременно  $C_1$  и  $C_2$ , то это — неподвижная точка и ее существование доказано.

Исключив этот случай, получим, что так как концевые точки отрезка имеют различную нумерацию, на отрезке (симплексе  $\Delta_1$ ) всегда найдется подотрезок (подсимплекс длины  $1/K$ ), концы которого  $a^K, b^K$  размечены по-разному, скажем, точка  $a^K \in C_1$  и  $b^K \in C_2$ . Такой подотрезок можно назвать *пестрым*. Нетрудно также показать, что таких пестрых отрезков будет нечетное число (что приводит к сильной версии теоремы Брауэра!).

При этом, конечно  $|a^K - b^K| = 1/K$  и неограниченно увеличивая  $K \rightarrow \infty$  получаем последовательность  $\{a^K, b^K\}$ , которую можно считать сходящейся по крайней мере к одной общей предельной точке  $x^* \in \Delta_1$ . По построению эта точка принадлежит как  $C_1$ , так и  $C_2$ , следовательно,  $C_1 \cap C_2$  непусто и  $x^* \in C_1 \cap C_2$  является неподвижной точкой.

Принципиальное отличие этого рассуждения от приведенных выше заключается в том, что оно

<sup>8</sup>Наиболее известным математиком из этой группы является К. Куратовский, с биографией которого можно ознакомиться по ссылке <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kuratowski.html>, хотя и остальные (Бронислав Кнастер и Стефан Мазуркевич), также хорошо известны как математики мирового класса.

1. обобщается на случай размерностей  $n > 1$ ,
2. дает конструктивный <sup>9</sup> способ построения неподвижной точки.

Главным моментом приведенного выше доказательства является непустота пересечения  $C_1 \cap C_2$ . В более общем случае  $n > 1$  она утверждается знаменитой леммой Кнастера-Куратовского-Мазуркевича.

**Лемма 3 (ККМ)** Пусть  $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  и  $C_i, i \in \mathcal{N}$  — семейство замкнутых подмножеств  $\Delta_n$  таких, что

1.  $\Delta_n = \cup_{i \in \mathcal{N}} C_i$ ;
2. если  $I \subset \mathcal{N}$  и  $J = \mathcal{N} \setminus I$ , то  $\Delta_n^I \subset \cup_{j \in J} C_j$ .

Тогда  $\cap_{i \in \mathcal{N}} C_i \neq \emptyset$ .

Мы докажем ККМ-лемму позднее, используя лемму Шпернера <sup>10</sup> о пестрых симплексах, а пока продемонстрируем, что теорема Брауэра следует из нее.

**Лемма 4** Если лемма 3(ККМ) верна, то для произвольных  $n$ -клеток выполнена и теорема Брауэра.

**Доказательство.** В соответствии с леммой 2 достаточно доказать это утверждение для симплексов  $\Delta_n$ . Пусть  $f$  отображает симплекс  $\Delta_n$  в себя  $f : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$  и пусть  $C_i = \{x : f_i(x) \leq x_i, x \in \Delta_n\}$ .

Ясно, что  $\Delta_n = \cup_{i=1}^n C_i$ , иначе существовал бы такой  $\bar{x}$ , что  $f_i(\bar{x}) > \bar{x}_i$  для всех  $i \in \mathcal{N}$ . Отсюда следует  $\sum_{i \in \mathcal{N}} f_i(\bar{x}) > \sum_{i \in \mathcal{N}} \bar{x}_i = 1$ , что противоречит  $f(\bar{x}) \in \Delta_n$ .

Заметим далее, что

$$\Delta_n^I = \{x : x_i = 0, i \in I, x \in \Delta_n\}$$

и если  $x \in \Delta_n^I$ , то  $f_i(x) \geq 0 = x_i, i \in I$  и при этом хотя бы для одного  $j \notin I$  выполнено неравенство  $f_j(x) \leq x_j$ .

Что это на самом деле так, можно показать от противного, предположив что  $f_j(x) > x_j$  для всех  $j \notin I$ . Тогда

$$\sum_{k \in \mathcal{N}} f_k(x) = \sum_{j \notin I} f_j(x) + \sum_{i \in I} f_i(x) \geq \sum_{j \notin I} f_j(x) > \sum_{j \notin I} x_j = 1,$$

что невозможно.

Отсюда следует  $x \in \cup_{j \in J} C_j$ , что эквивалентно  $\Delta_n^I \subset \cup_{j \in J} C_j$ .

Следовательно, все условия ККМ-леммы удовлетворены и существует  $x^* \in \cap_{i \in \mathcal{N}} C_i$ . Тогда  $f_i(x^*) \leq x_i^*$  для всех  $i$  и поскольку  $\sum_{i=1}^n f_i(x^*) = \sum_{i=1}^n x_i^* = 1$ , то  $f(x^*) = x^*$ , что и требовалось доказать. ■

---

<sup>9</sup> Конструктивный не стоит понимать слишком буквально. Во-первых, в этом построении используется явно неконструктивная операция предельного перехода. Во-вторых, нет определенного способа поиска пестрых подсимплексов, остается полный перебор, что при более или менее высоких размерностях практически нереализуемо. Наверное сам Брауэр, будучи апологетом конструктивизма, такой способ доказательства наверняка забраковал !

<sup>10</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Emanuel\\_Sperner](http://en.wikipedia.org/wiki/Emanuel_Sperner)

## 2.3 Теорема Какутани

Можно ли ослабить условия теоремы Брауэра? Нетрудно построить простейшие примеры, когда невыполнение хотя бы одного из требований (непрерывности  $f$  или  $n$ -клеточности  $C$ ) приводит к тому, что у  $f$  на  $C$  нет неподвижных точек. Поэтому развить результат Брауэра можно в каких-то других направлениях, одним из которых является рассмотрение многозначных отображений  $f$ . Такое отображение  $f : A \rightrightarrows B$  можно задать как подмножество декартового произведения  $A \times B$  или множество пар  $(a, b)$ , где  $a \in A$ , а  $b \in f(a) \subset B$  и на  $f(a)$  уже не накладываются условия однозначности.

Развитие теории неподвижных точек именно в этом направлении представляет особый интерес для математической экономики, поскольку именно в ней зачастую возникает ситуация, когда на некоторое воздействие  $a \in A$  имеется несколько экономически равнозначных вариантов поведения  $f(a)$ .

Рассмотрение многозначных отображений требует, однако, модификации понятия непрерывности  $f$ . Плодотворным обобщением понятия непрерывности является понятие полунепрерывности сверху.

**Определение 3** *Отображение  $f : A \rightrightarrows B$  называется полунепрерывным сверху в точке  $a \in A$  если для любой окрестности нуля  $U$  существует окрестность нуля  $V$ , такая, что из  $a' \in a + V$  следует  $f(a') \subset f(a) + U$ .*

Полунепрерывные сверху отображения часто возникают как результат решения экстремальных задач. Пусть, например, целевая функция  $f(x, a)$  оптимизационной задачи зависит не только от переменных  $x$ , по которым вычисляется минимум, но и от параметра  $a$ , определяемого из каких-либо иных соображений. Тогда решение задачи  $\min_x f(x, a)$  зависит от  $a$  и является в общем случае многозначным отображением, определяемым как

$$X(a) = \{x^* : f(x^*, a) \leq f(x, a) \text{ для всех } x\}. \quad (7)$$

При достаточно необременительных условиях на  $f$ , например, непрерывности  $f$  и существования решения у задачи (7) для всех  $a$  из некоторой окрестности точки  $a^0$ , отображение  $X(a)$  будет полунепрерывным сверху в  $a^0$ .

Справедлива следующая теорема, принадлежащая С. Какутани (Shizuo Kakutani) <sup>11</sup>.

**Теорема 1** *Пусть  $C$  — замкнутая  $n$ -клетка и  $f : C \rightrightarrows C$  полунепрерывное сверху выпуклозначное точечно-множественное отображение  $C$  в себя. Тогда существует  $x^* \in C$  такое, что  $x^* \in f(x^*)$ .*

Такое  $x^*$  можно считать неподвижной точкой  $f$ . Отметим также, что в условии теоремы появляется новое условие — выпуклозначность  $f$ , что означает, что при любых  $x \in C$  множество  $f(x) \subset A$  выпукло.

**Доказательство.** Мы докажем теорему Какутани в предположении, что теорема Брауэра имеет место. В соответствии с вышеизложенным достаточно рассмотреть ситуацию, когда  $C$  представляет собой правильный симплекс. Пусть  $\mathcal{T}$  — совокупность симплексов, образующих правильное разбиение  $C$ . Откладывая строгое формальное определение этого понятия на дальнейшее, скажем, что при этом для каждой точки  $x \in C$  существует единственный симплекс  $\sigma_x \in \mathcal{T}$ , такой, что  $x \in \text{int } \sigma_x$ .

Совокупность вершин симплексов, образующих  $\mathcal{T}$ , обозначим через  $\mathcal{V} = \{v^1, v^2, \dots, v^{N_{\mathcal{T}}}\}$ . и для каждой  $v \in \mathcal{V}$  выберем единственное  $f_v \in f(v) \subset C$ .

Тогда, выполнив следующие операции,

<sup>11</sup><http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Kakutani.html>

1. Для заданного  $x \in X$  определить единственный симплекс  $\sigma_x \in \mathcal{T}$ , такой, что  $x \in \text{ri } \sigma_x$ ;
2. Определить барицентрические координаты  $x$  в этом симплексе, т.е. такие  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , такие, что

$$\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, k; \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \quad \text{и} \quad x = \sum_{i=1}^k \lambda_i v^i,$$

где  $v^i \in \mathcal{V}$  — вершины симплекса  $\sigma_x$ ,  $k$  — размерность симплекса  $\sigma_x$ . Для простоты обозначений мы опускаем зависимость номеров вершин, размерности симплекса  $\sigma_x$  от самой точки  $x$ .

3. Положить  $\phi_{\mathcal{V}}(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_{v^i} \in C$

получим непрерывную функцию  $\phi_{\mathcal{V}}(x)$ , отображающую  $C$  в себя.

В силу теоремы Брауэра у  $\phi_{\mathcal{V}}(x)$  существует неподвижная точка  $x_{\mathcal{V}}^*$ , такая что

$$x_{\mathcal{V}}^* = \sum_{i=1}^{k_*} \lambda_i^* f_{v_i^*}, \quad (8)$$

где  $k_*$ ,  $\lambda_i^*$ ,  $f_{v_i^*}$  определяются процессом, описанным выше.

Переходя к пределу по разбиениям  $\mathcal{T}$  таким, что максимальный диаметр подсимплексов стремится к нулю, можно считать, что соответствующие величины сходятся:

1.  $x_{\mathcal{V}}^* \rightarrow x^*$ , в силу компактности  $C$ ;
2.  $k_* \rightarrow k$ , в силу конечного выбора значений для  $k_*$ ;
3.  $\lambda_i^* \rightarrow \lambda_i$ , в силу компактности множества значений для  $\lambda_i^*$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ;
4.  $f_{v_i^*} \rightarrow f_i \in f(x^*)$ , в силу полунепрерывности сверху  $f$  и того, что диаметр подсимплекса, содержащего  $x_{\mathcal{V}}^*$  стремится к нулю.

Используя в (8) эти предельные переходы, получаем

$$x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i \in f(x^*),$$

что и доказывает теорему Какутани. ■

## 2.4 Другие обобщения

Теорема Брауэра обобщалась и в других направлениях, среди которых мы рассмотрим три, которые переносят эту теорему на отображения, значения которых могут выходить за рассматриваемое множество, на отображения, рассматриваемые на неограниченных множествах и на один класс отображений, имитирующих процесс установления ценового равновесия.

Мы начнем с обобщения теоремы Брауэра на случай, когда рассматриваемого компакта  $C$  и заданного точечно-множественного отображения  $F$  не выполняется условие  $F(C) = \{\cap_{x \in C} F(x)\} \subset C$ , то есть значение отображения на точках  $C$  может выходить за пределы  $C$ .

Несмотря на очевидные контрпримеры, в определенных условиях неподвижная точка все же существует.

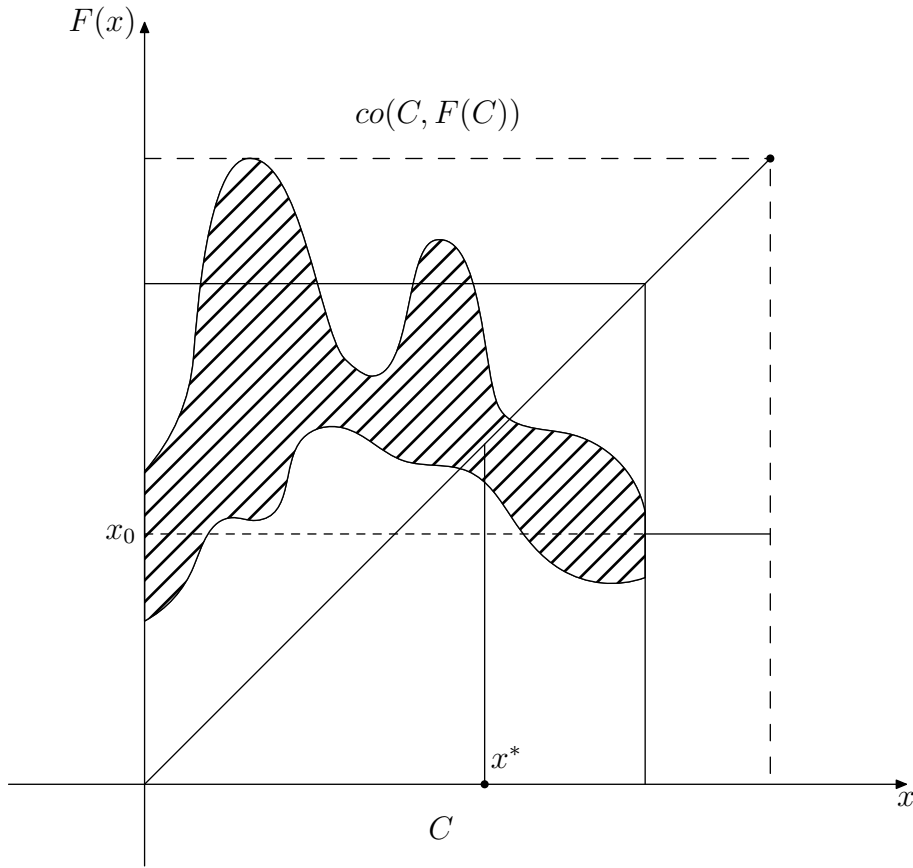


Рис. 3: Конструкция доказательства теоремы Ивза

**Теорема 1** Пусть  $C$  — выпуклый компакт с непустой внутренней частью и  $c^0 \in \text{int}(C)$ . Если  $F(x)$  полунепрерывно сверху (п.н.св.) на  $C$  и  $c^0 \in F(c)$  для всех  $c \in \partial C$ , то существует  $x^* \in C$  такое, что  $x^* \in F(x^*)$ .

**Доказательство.** Рис. 3 поясняет идею доказательства. В силу п.н.св.  $F(x)$  множество  $F(C) = \bigcap_{x \in C} F(x)$  компактно, следовательно, компактно и  $\tilde{C} = \text{co}\{C, F(C)\}$ . Определим

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x), & x \in C \\ \emptyset & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad F_2(x) = \begin{cases} c^0 & x \notin \text{int}(C) \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

и  $F_0(x) = \text{co}\{F_1(x), F_2(x)\}$ .

Очевидно что  $F_0$  полунепрерывно сверху, выпукло- и компактно-значно и отображает  $\tilde{C}$  в себя. Тогда, согласно теореме Какутани,  $F_0$  имеет неподвижную точку  $x^*$  такую, что  $x^* \in F_0(x^*)$ .

Если  $x^* \notin C$ , то  $x^* = F_0(x^*) = F_2(x^*) = c^0 \in C$ , что приводит к противоречию. Следовательно  $x^* \in C$  и  $x^* \in F_0(x^*) = F(x^*)$ , что доказывает теорему. ■

Следующая теорема позволяет установить существование неподвижных точек в неограниченных множествах.

**Теорема 2** Пусть  $F(x)$  полунепрерывно сверху для  $x \in E$  и существуют такие  $x^0$  и  $\rho > 0$ , что при для любого  $x \notin x^0 + \rho B$  найдется  $w_x \in E$  такое, что  $w_x(x^0 - x) > 0$  и  $w_x(f - x) > 0$  для всех  $f \in F(x)$ . Тогда у  $F$  есть неподвижная точка в  $x^0 + \rho B$ .

**Доказательство.** Положим  $C_0 = x^0 + \rho B$  и  $C_1 = x^0 + \rho_1 B$ , где  $\rho_1 > \rho$ . Определим для



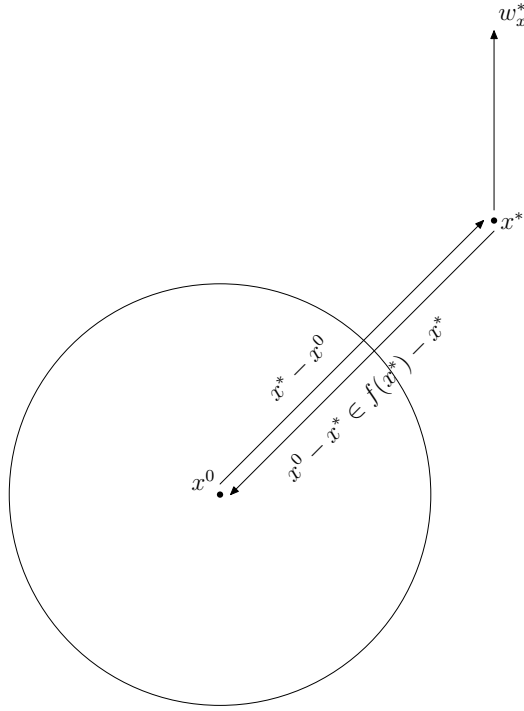


Рис. 4: Конструкция доказательства второй теоремы Ивза. Очевидно, что вектор  $w_x^*$  не может иметь одновременно положительного скалярного произведения как с  $x^* - x^0$ , так и с  $x^0 - x^*$ .

$x \in C_1$

$$F_1(x) = \begin{cases} x^0 & x \in C_1 \setminus C_0, \\ \emptyset & x \in \text{int } C_0, \end{cases}$$

и положим  $F_0(x) = \text{co} \{F(x), F_1(x)\}$ .

По построению  $F_0(x)$  полунепрерывно сверху и  $x^0 \in F_0(x)$  для  $x \in \partial C_1$ . Следовательно, по предыдущей теореме у  $F_0$  есть неподвижная точка  $x^*$  на  $C_1$ . Если  $x^* \in \text{int}(C_0)$ , то  $F_0(x^*) = F(x^*)$  и теорема доказана.

Если  $x^* \notin \text{int}(C_0)$ , то  $x^* \in \text{co} \{x^0, F(x^*)\}$ . Тогда существует  $w_*$  такое, что  $(x^* - f_*)w_* > 0$  для всех  $f_* \in F(x^*)$ , откуда следует, что  $x^* \notin F(x^*)$ . Следовательно

$$x^* = \lambda_* x^0 + (1 - \lambda_*) f_* \quad (9)$$

для некоторого  $f_* \in F(x^*)$  и  $\lambda_* \in (0, 1)$ . Последнее следует из того, что так как  $x^* \notin F(x^*)$ , то  $\lambda_* > 0$ , а поскольку  $\|x^* - x^0\| \geq \rho > 0$ , то  $\lambda_* < 1$ .

Вычитая  $x^0$  из обеих частей (9) получаем

$$x^* - x^0 = (1 - \lambda_*)(f_* - x^0).$$

Умножив это равенств на  $w_*$ , получим

$$0 > w_*(x^* - x^0) = (1 - \lambda_*)w_*(f_* - x^0) > 0.$$

Это противоречие доказывает теорему. Рис. 4 поясняет идею доказательства.  $\blacksquare$

Существует еще одно обобщение теоремы Какутани полезное для исследования моделей равновесия в экономических системах с производством. Для ее формулировки напомним определение  $i$ -ой грани  $\Delta_n^i$  симплекса  $\Delta_n$ :  $\Delta_n^i = \Delta_n \cap \{x_i = 0\}$ .

**Теорема 3** Пусть полунепрерывное сверху отображение  $F$  такого, то для любого  $x \in \Delta_n$  имеет место  $F(x)e = 1$  и для каждого  $i = 0, 1, \dots, n$  существует вектор  $f^i$  такой, что  $f^i e = 0$  и для  $x \in \Delta_n^i$  выполняются следующие условия:

1.  $x + f^i \in F(x)$ ;
2.  $f^i e^j < 0$  для  $j \neq i$ .

Тогда у  $F$  есть неподвижная точка на  $\Delta_n$ .

**Доказательство.** Заметим прежде всего, что условие 2 означает, что  $f_i^i > 0$ , а  $f_j^i < 0$  для  $i \neq j$ . Тогда при  $x \in \Delta_n^i$  в  $F(x)$  найдется вектор  $g$ , который будет удовлетворять условиям

$$g_i > 0, \quad g_j < x_j.$$

Если  $x$  — это цены, то с помощью  $F(x)$  будут увеличиваться нулевые цены (или близкие к ним) за счет уменьшения остальных. Отображение  $F(x)$  при этом может представлять рыночный механизм, согласно которому выгоднее становится использовать дешевые ресурсы, спрос на них растет и следовательно цена повышается. Интуитивно становится вероятным, что при этом рано или поздно установится некое равновесие, которое можно считать неподвижной точкой  $F$ .

Формальное же доказательство строится следующим образом. Определим

$$\tilde{\Delta}_n = \text{aff} \{ \Delta_n \} \cap \{ y : y \geq -1 \} \supset \text{aff} \{ \Delta_n \} \cap \{ y : y \geq 0 \} = \Delta_n$$

и пусть  $I_x = \{ i : x_i = \min_j x_j \}$ . Ясно, что при  $x \in \tilde{\Delta}_n \setminus \Delta_n$  значения  $x_i, i \in I_x < 0$  и, конечно, одинаковы. Обозначим также через  $a^0$  центр симплекса  $\Delta_n$ :  $a^0 = \frac{1}{n+1} e \in \text{ri} \{ \Delta_n \} \subset \text{ri} \{ \tilde{\Delta}_n \}$ .

Определим точечно-множественные отображения

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) & x \in \Delta_n \\ \emptyset & x \in \tilde{\Delta}_n \setminus \Delta_n, \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} x + \text{co} \{ f^i, i \in I_x \} & x \in \tilde{\Delta}_n \setminus \Delta_n \\ \emptyset & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} a^0 & x \in \partial \tilde{\Delta}_n, \\ \emptyset & x \in \text{ri} \tilde{\Delta}_n. \end{cases}$$

Определим на  $\tilde{\Delta}_n$  отображение  $F_0(x) = \text{co} \{ F_1(x), F_2(x), F_3(x) \}$ . Это отображение полунепрерывно сверху на  $\tilde{\Delta}_n$  и  $a^0 \in F_0(x)$  для всех  $x \in \partial \tilde{\Delta}_n$ . Следовательно, в силу первой теоремы Eaves 1 существует  $x^*$ , такой, что  $x^* \in F_0(x^*)$ .

Если  $x^* \in \Delta_n$ , то  $F_0(x^*) = F(x^*)$  и утверждение теоремы выполняется тривиальным образом.

Если  $x^* \notin \Delta_n$  то, следовательно,  $x^* \in \tilde{\Delta}_n \setminus \Delta_n$ . Положим  $I_* = \{ i : x^*_i = \min_j x^*_j \}$  и заметим, что в этом случае  $\min_j x^*_j < 0$  и

$$F_0(x^*) \subset \text{co} \{ a^0, x^* + f^i, i \in I_* \} = Z.$$

Пусть  $g \in F_0(x^*)$  и оценим

$$\sum_{i \in I_*} g_i = \sum_{i \in I_*} (\theta a_i^0 + (1 - \theta)(x^*_i + \sum_{k \in I_*} \lambda_k f_i^k))$$

для некоторого  $\theta \in [0, 1]$  и  $\lambda \in \Delta_{|I_*|}$ .

Оценим каждое из слагаемых в правой части отдельно.

$$\sum_{i \in I_*} \theta a_i^0 = \theta \frac{1}{n+1} |I_*| \geq 0 \geq \theta \sum_{i \in I_*} x_i^*. \quad (10)$$

В свою очередь

$$\sum_{i \in I_*} (1 - \theta) (x_i^* + \sum_{k \in I_*} \lambda_k f_i^k) = (1 - \theta) \sum_{i \in I_*} x_i^* + \sum_{i \in I_*} \sum_{k \in I_*} \lambda_k f_i^k = (1 - \theta) \sum_{i \in I_*} x_i^* + \sum_{k \in I_*} \lambda_k \sum_{i \in I_*} f_i^k.$$

Поскольку  $0 = f^k e = \sum_{i \in I_*} f_i^k + \sum_{i \notin I_*} f_i^k$ , то  $\sum_{i \in I_*} f_i^k = -\sum_{i \notin I_*} f_i^k$  и, следовательно,

$$(1 - \theta) \sum_{i \in I_*} x_i^* + \sum_{k \in I_*} \lambda_k \sum_{i \in I_*} f_i^k = (1 - \theta) \sum_{i \in I_*} x_i^* - \sum_{k \in I_*} \lambda_k \sum_{i \notin I_*} f_i^k.$$

Во втором слагаемом  $k \neq i$  и, следовательно,  $f_i^k < 0$ . Поэтому  $\sum_{k \in I_*} \lambda_k \sum_{i \notin I_*} f_i^k < 0$  и окончательно

$$\sum_{i \in I_*} (1 - \theta) x_i^* + \sum_{k \in I_*} \lambda_k \sum_{i \in I_*} f_i^k > (1 - \theta) \sum_{i \in I_*} x_i^*. \quad (11)$$

Складывая оценки (10) и (11) получаем

$$\sum_{i \in I_*} g_i = \sum_{i \in I_*} (\theta a_i^0 + (1 - \theta) (x_i^* + \sum_{k \in I_*} \lambda_k f_i^k)) > \theta \sum_{i \in I_*} x_i^* + (1 - \theta) \sum_{i \in I_*} x_i^* = \sum_{i \in I_*} x_i^*$$

для любого  $g \in F_0(x^*)$ . Однако  $x^*$  является по предположению неподвижной точкой:  $x^* \in F(x^*)$  и в последнем неравенстве можно положить  $g = x^*$ ! Тогда  $\sum_{i \in I_*} x_i > \sum_{i \in I_*} x_i$  и это противоречие доказывает теорему. ■

## 3 Лемма Шпернера

### 3.1 Триангуляции

Основой доказательства леммы Шпернера и, следовательно, теоремы Брауэра является тот относительно простой факт, что такое просто устроенное множество как симплекс можно разделить на ему же подобные подсимплексы, удовлетворяющие некоторым условиям регулярности.

Это разбиение  $n$ -мерного симплекса  $\Delta_n$  использует конечный набор  $\mathcal{Z} = \{z^m, m = 1, 2, \dots, M\}$  точек  $z^m \in \Delta_n$ , на основе которых строится набор симплексов  $\mathcal{S} = \{\sigma_k, k = 1, 2, \dots, K\}$ . Каждый симплекс  $\sigma_k$  представляет собой выпуклую оболочку определенного (и единственного) подмножества вершин  $\mathcal{Z}$ :

$$\sigma_k = \text{co} \{z^j, j \in \mathcal{Z}_k \subset \mathcal{Z}\},$$

где подмножества вершин  $\mathcal{Z}_k$  удовлетворяют в совокупности следующим простым условиям:

1. Каждое подмножество  $\mathcal{Z}_k$  аффинно независимо;
2. Совокупность симплексов  $\mathcal{S}$  покрывает  $\Delta_n$ :

$$\Delta_n = \bigcup_{k=1}^K \sigma_k.$$

3. Совокупность симплексов  $\mathcal{S}$  замкнута относительно пересечения: если  $\sigma' \in \mathcal{S}, \sigma'' \in \mathcal{S}$  то и  $\sigma' \cap \sigma'' \in \mathcal{S}$ .

Совокупность вершин  $\mathcal{Z}$ , семейство  $\mathcal{A}$  их аффинно-независимых подмножеств  $\mathcal{A} = \{\mathcal{Z}_k, k = 1, 2, \dots, K\}$  и набор симплексов  $\mathcal{S}$ , удовлетворяющих этим условиям, называется триангуляцией  $\mathcal{T} = \{\mathcal{Z}, \mathcal{A}, \mathcal{S}\}$ .

Непосредственно из определения аффинной независимости можно легко получить следующее свойство симплексов  $\sigma_k \in \mathcal{S}$ .

**Лемма 5** *Никакая из относительных внутренних частей  $\sigma \in \mathcal{S}$  не содержит точек из  $\mathcal{Z}$ :*

$$\mathcal{Z} \cap \{\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}} \text{ri} \{\sigma\}\} = \emptyset$$

**Доказательство.** Если существует такое  $\bar{z} \in \mathcal{Z}$  и  $\bar{\sigma} \in \mathcal{S}$ , что  $\bar{z} \in \text{ri} \bar{\sigma}$ , то к подмножеству вершин  $\bar{Z} = \{\bar{z}^1, \bar{z}^2, \dots, \bar{z}^m\}$ , задающего  $\bar{\sigma}$ , можно добавить  $\bar{z}$ , причем

$$\bar{\sigma} = \text{co} \{\bar{z}, \text{co} \{\bar{Z}\}\} = \text{co} \{\bar{z}, \bar{z}^1, \bar{z}^2, \dots, \bar{z}^m\}.$$

Если  $\bar{z} \notin \bar{Z}$ , то это противоречит единственности  $\bar{Z}$ , задающего  $\bar{\sigma}$ , следовательно  $\bar{z}$  совпадает с одним из  $\bar{z}^i$ . Для определенности предположим, что  $\bar{z} = \bar{z}^1$ . Однако при этом из  $\bar{z}^1 = \bar{z} \in \text{ri} \bar{\sigma}$  следует, что для некоторых  $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$

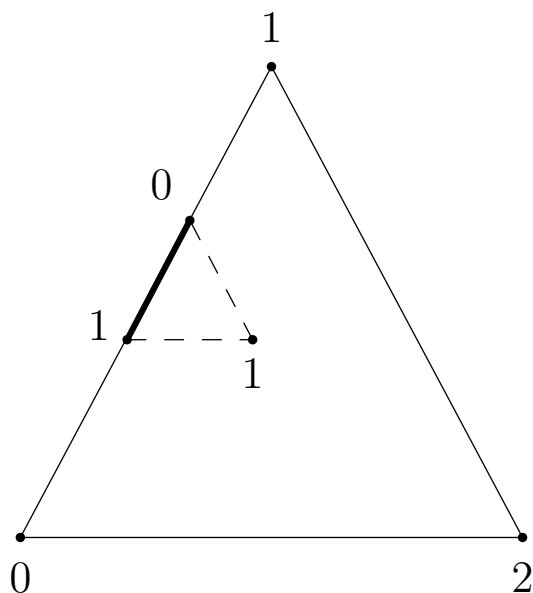
$$\bar{z}^1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{z}^i$$

или

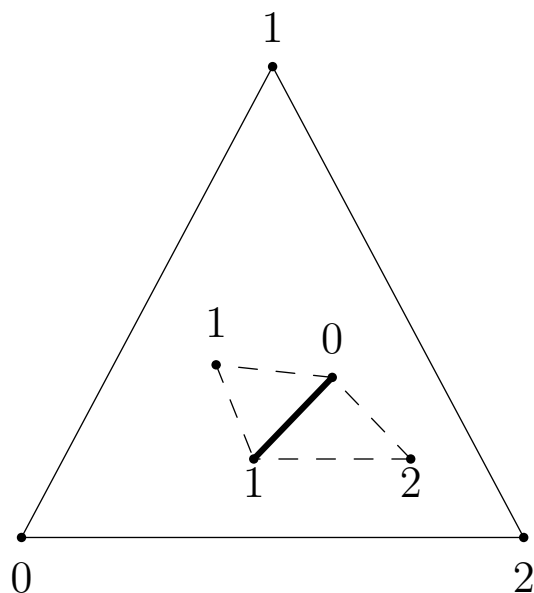
$$(1 - \lambda_1) \bar{z}^1 - \sum_{i=2}^m \lambda_i \bar{z}^i = \sum_{i=1}^m \mu_i \bar{z}^i = 0,$$

где  $\sum_{i=1}^m \mu_i = 1 - \lambda_1 - \sum_{i=2}^m \lambda_i = 0$ , однако никакая из  $\mu_i$  не равна нулю, что противоречит аффинной независимости  $\bar{Z}$ . ■

Используя эту лемму можно показать и следующее свойство триангуляций.



Грань размерности  $n - 1$  на границе



Внутренняя грань размерности  $n - 1$ .

Рис. 5: Два случая расположения грани размерности  $(n - 1)$

**Лемма 6** Если  $\sigma_a$  —  $n - 1$ -мерная грань  $\sigma_b$  то либо  $\sigma_a \subset \partial\Delta_n$  и  $\sigma_a$  — грань только одного  $\sigma_b$ , либо  $\sigma_a \not\subset \partial\Delta_n$  и  $\sigma_a$  — грань двух  $\sigma_b$  и  $\sigma_{b'}$  из  $G$ .

**Доказательство.** Доказать этот факт можно следующим образом. Пусть  $\sigma_0$  — симплекс, размерности  $n - 1$ , порождаемый точками (узлами триангуляции)  $\mathcal{V}_0 = \{z^1, z^2, \dots, z^n\}$  и пусть  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  — симплексы размерности  $n$ , порождаемые множествами  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_k$  и

$$\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_j = \mathcal{V}_0, j = 1, 2, \dots, k.$$

Это означает, что каждое из  $\mathcal{V}_j$  получается из  $\mathcal{V}_0$  добавлением некоторой вершины  $\bar{z}_j \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_0$ .

Аффинная оболочка симплекса  $\sigma_0$  представляет собой гиперплоскость размерности  $n - 1$ , которая делит  $\Delta_n$  не более чем на две части и если  $k \geq 3$ , то по крайней мере два симплекса из набора  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  окажутся в одной части  $\Delta_n$ .<sup>12</sup> Без потери общности можно считать, что это симплексы  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Тогда  $\sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2 \in \mathcal{S}$  содержит и не совпадает с  $\sigma_0$  и, следовательно, является симплексом размерности  $n$ , определяемым вершинами  $\mathcal{V}_0$  и некоторой новой вершиной  $\hat{z}$ , которая принадлежит как  $\sigma_1$ , так и  $\sigma_2$ . Поэтому она не совпадает по крайней мере с одной из дополнительных вершин  $\bar{z}_1$  или  $\bar{z}_2$  и принадлежит относительной внутренней того симплекса, у которого она не совпадает, что противоречит лемме 5. Это противоречие доказывает. ■ Два случая, о которых идет речь в лемме 6 проиллюстрированы на рис. 5.

Кроме этого, можно показать и следующий полезный результат.

**Лемма 7** набор  $G_i = \{\Delta_n^i \cap \sigma_a, a \in A\}$  является триангуляцией  $\Delta_n^i$ .

Далее будут подробнее рассмотрены различные варианты триангуляции  $\Delta_n$ , а пока примем на веру, что для любого  $\epsilon > 0$  можно построить такую триангуляцию  $G_\epsilon$ , что ее харак-

<sup>12</sup>Трудно поверить, но это на самом деле является одним из примеров применения так называемого принципа клеток Дирихле (см. например <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dirichlet.html>), который в частности утверждает, что если рассаживать 7 голубей по 9 клеткам, то по крайней мере 2 клетки будет пустыми. Математика!

терный параметр точности

$$\text{mesh}(G_\epsilon) = \max_{\sigma \in G_\epsilon} \text{diam}(\sigma) \leq \epsilon.$$

### 3.2 Пестрые симплексы

Для триангуляций можно ввести понятие разметки, когда каждой вершине  $v$  (0-мерный симплекс триангуляции  $G$ ) присваивается целочисленная метка  $\nu(v)$  из множества  $\{0, 1, \dots, n\}$ . Такая разметка называется *правильной*, если  $v \in \Delta_n^i$  влечет  $\nu(v) \neq i$ .

Для правильно размеченных триангуляций справедлива следующая лемма.

**Лемма 8 (Лемма Шпернера в сильной форме)** Пусть  $G$  — правильно размеченная триангуляция  $\Delta_n$ . Тогда существует нечетное число симплексов  $\bar{\sigma} \in G$  таких, что

- $\bar{\sigma}$  —  $n$ -мерный симплекс,
- вершины  $\bar{\sigma}$  помечены всеми числами  $0, 1, \dots, n$ .

**Доказательство.** Доказательство производится индукцией по размерности пространства  $n$ . Пусть  $n = 1$  и рассмотрим  $K \times M$  матрицу  $J$ , являющуюся матрицей инцидентности 1-мерных симплексов  $\sigma \in G$  в количестве  $M$  и 0-мерных симплексов, размеченных нулем в количестве  $K$ . Конечно, эти 0-мерные симплексы — это просто вершины триангуляции  $G$ , помеченные нулем. Поскольку в правильной разметке вершины  $\Delta_n$  размечены всеми числами от 0 до  $n$ , то  $K > 0$ . Таким образом

$$J_{vs} = \begin{cases} 1 & \text{если вершина } v \text{ принадлежит симплексу } s \text{ и имеет метку } 0 \\ 0 & \text{вершина } v \text{ имеет метку } 0, \text{ но не принадлежит } s \end{cases}$$

— непустая матрица.

Количество единиц в этой матрице можно подсчитать двумя способами:

**I** Суммируя по столбцам-симплексам, и затем по строкам-вершинам, получаем  $2A + B$ , где  $A$  — количество 1-мерных симплексов, размеченных  $(0, 0)$ , т.е. имеющих две вершины с нулевыми метками, а  $B$  — это количество симплексов, размеченных  $(0, 1)$ . Заметим, что это как раз число пестрых симплексов.

**II** Суммируя по строкам-вершинам и затем по столбцам-симплексам, получаем  $2D + 1$ , где  $D$  — количество внутренних 0-мерных симплексов (вершин), размеченных 0, а 1 появляется из-за того, что одна из концевых вершин имеет метку 0.

Приравнявая

$$2A + B = 2D + 1$$

получаем, что  $B$  с необходимостью нечетно и следовательно не может быть нулем. Тем самым утверждение теоремы справедливо для  $n = 1$  и осталось проверить шаг индукции.

Предположим, что лемма выполняется для размерности  $n - 1$  и рассмотрим снова  $K \times M$  матрицу инцидентности пестрых  $n - 1$ -мерных симплексов  $\sigma$  триангуляции  $G$ , размеченных метками  $0, 1, \dots, n - 1$  и  $n$ -мерных симплексов триангуляции. Так же как и в предыдущем случае подсчитаем двумя способами количество единиц в этой матрице.

**I** Суммируя по столбцам-симплексам, и затем по строкам-вершинам, получаем  $2A + B$ , где  $A$  — количество  $n$ -мерных симплексов, размеченных  $(0, 1, \dots, n - 1)$ , т.е. полупестрых симплексов, имеющих  $n - 1$ -мерную пеструю грань  $v$ , а  $B$  — это количество пестрых  $n$ -симплексов, размеченных  $(0, 1, \dots, n)$ .

II Суммируя по строкам-вершинам и затем по столбцам-симплексам, получаем  $2D + C$ , где  $D$  — количество внутренних  $n - 1$ -мерных пестрых симплексов, а  $C$  — количество граничных  $n - 1$ -мерных пестрых симплексов, размеченных  $0, 1, \dots, n - 1$ .

Заметим, что есть только одна внешняя грань симплекса  $\Delta_n$ , на которой возможно появление  $(0, 1, \dots, n - 1)$ -размеченных подсимплексов — это грань, противоположная  $n + 1$ -ой вершине  $v^{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)$ .

Поскольку эта грань является  $n - 1$ -мерным симплексом, на котором триангуляция  $\Delta_n$  наводит правильную триангуляцию с правильной разметкой соответствующих вершин, то согласно предположению индукции  $C$  нечетно. Отсюда из равенства

$$2A + B = 2D + C$$

следует, что  $B$  нечетно, и следовательно не может быть нулем. ■

Теперь можно легко доказать следующее утверждение.

**Лемма 9** Из леммы 8 (Шпернера) следует лемма 3 (Кнастера-Куратовского-Мазуркевича).

**Доказательство.** Мы сохраним обозначения леммы 3 на стр. 13. Пусть  $G_\epsilon$  — триангуляция  $\Delta_n$  с  $\text{mesh}(G_\epsilon) \leq \epsilon$  и  $\mathcal{V}$  — множество вершин (0-мерных симплексов)  $G_\epsilon$ . Разметим вершины по следующему правилу:

$$\nu(v) = \min j : v \in C_j.$$

Легко видеть, что это правильная разметка.

В силу леммы 8 существует  $n$ -симплекс  $\sigma_\epsilon \in G_\epsilon$  такой, что его вершины  $v^0, v^1, \dots, v^n$  пронумерованы всеми числами от 0 до  $n$ . При этом

$$\max_{0 \leq i, j \leq n} \|v^i - v^j\| \leq \text{mesh}(G_\epsilon) \leq \epsilon.$$

Не умаляя общности, можно считать  $\nu(v^i) = i$ , т.е.  $v^i \in C^i$ . Точки  $v^i$  неявно зависят от  $\epsilon$  и, положив  $\epsilon_k = 1/k$  при  $k = 1, 2, \dots \rightarrow \infty$ , можно построить соответствующие последовательности  $\{v^{i,k}\}$  такие, что

$$v^{i,k} \in C_i, \quad \max_{0 \leq i, j \leq n} \|v^i - v^j\| \leq 1/k. \quad (12)$$

Не умаляя общности последовательности  $\{v^{i,k}\}$  можно считать сходящимися:  $v^{i,k} \rightarrow \bar{v}^i \in C_i$  при  $k \rightarrow \infty$ , а в силу (12)  $\bar{v}_i = \bar{v}_j$  для всех  $i, j$ . Обозначив это общую точку просто  $\bar{v}$ , получаем  $\bar{v} \in C_i, i = 0, 1, \dots, n$  или  $\bar{v} \in \bigcap_{i=0}^n C_i$ , что завершает доказательство КKM-леммы и, следовательно, теоремы Брауэра.

### 3.3 Построение триангуляций

Ключевым элементом симплицальных алгоритмов является триангуляция исходного симплекса  $\Delta_n$  на подсимплексы меньшего размера. Такая триангуляция должно удовлетворять условиям правильности и иметь высокую точность определения неподвижной точки. В качестве такой меры может служить максимальный диаметр подсимплекса триангуляции, который желательно сделать как можно меньшим.

Поскольку  $\Delta_n$  не слишком удобно непосредственно разбивать на подсимплексы, можно воспользоваться линейным гомеоморфизмом между  $\Delta_n$  и  $C_n$ , описанном в разделе 2.2. Линейность и невырожденность этого гомеоморфизма гарантирует аффинную независимость образов аффинно-независимой исходных систем вершин симплексов и то, что выпуклые оболочки образов являются образами выпуклых оболочек прообразов.

Множество  $C_n \subset E_n$  и для его триангуляции можно включить его в единичный куб и воспользоваться симплицальным разбиением куба. Из алгоритмических соображений желательно минимизировать количество симплексов, использованных для разбиения куба, однако это весьма сложная задача <sup>13</sup>.

### 3.3.1 Триангуляция $K_1$

Это одна из простейших триангуляций  $n$ -мерного куба и наименее экономичная по числу подсимплексов, для нее число подсимплексов куба составляет  $n!$ . Каждый подсимплекс в этой триангуляции характеризуется корневой вершиной  $v^0$  и перестановкой  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$  чисел  $1, 2, \dots, n$ . Корневая вершина  $v^0$  представляет собой одну из вершин симплекса, остальные получаются по рекуррентной схеме

$$v^k = v^{k-1} + e^{\nu_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

где  $e^{\nu_k}$  —  $\nu_k$ -ый единичный орт,

$$e_i^{\nu_k} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = \nu_k \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко видеть, что в силу аффинной независимости векторов  $v^0, v^1, \dots, v^n$  множество  $S(v^0, \nu) = \text{co}\{v^0, v^1, \dots, v^n\}$  представляет собой  $n$ -мерный симплекс.

Эту триангуляцию единичного куба можно тривиально превратить в триангуляцию куба со стороной  $\delta > 0$ , для этого достаточно лишь заменить (13) на

$$v^k = v^{k-1} + \delta e^{\nu_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

поэтому далее, не умаляя общности, мы будем рассматривать лишь  $K_1$ -триангуляцию единичного куба.

С каждой вершиной  $v$  симплекса триангуляции ( а следовательно и куба ) в зависимости от задачи определена целочисленная метка  $\lambda(v)$  и поиск пестрого симплекса заключается в том, чтобы найти такой куб ( фактически вершину  $\bar{v}^0$  ) и перестановку  $\bar{\nu}$  такие, что метки

$$\lambda(\bar{v}^0), \lambda(\bar{v}^1), \dots, \lambda(\bar{v}^n)$$

<sup>13</sup>По состоянию на 2005 г. известны известны лишь следующие оценки для минимального числа  $\tau_n$  симплексов, на которых может быть поделен  $n$ -мерный куб: [6]  $\tau_n^l = \frac{6^{n/2}n!}{2(n+1)^{(n+1)/2}} \leq \tau_n \leq 0.816^n n! = \tau_n^u$ . Оценка сверху выполняется для больших  $n$ . Соотношения между этими оценками и фактическими значениями  $\tau_n$ , там где они известны, приведены в следующей таблице

$n$	$\tau_n^u/\tau_n^l$	$\tau_n^l/n!$	$\tau_n^l$	$\tau_n$
1	1.33	1.2247	0	1
2	1.15	1.7321	1	2
3	1.18	1.8371	2	5
4	1.38	1.6100	7	16
5	1.77	1.2247	24	67
6	2.48	0.8331	85	308
7	3.73	0.5167	325	1493
8	5.97	0.2963	1327	?
9	10.11	0.1587	5759	?
10	17.98	0.0801	26414	?

из которой видно, что, несмотря на усилия математиков, разрыв между оценками остается весьма большим и прогрессивно увеличивается с ростом размерности.



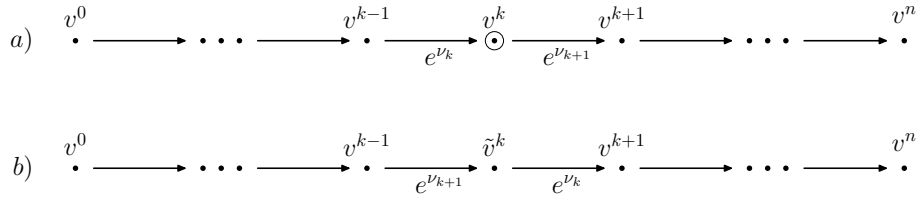


Рис. 6: Замена начальной вершины пути.

в совокупности образовывали все множество  $[0, n]$ ,

Для упрощения задачи поиска такого куба-симплекса предположим, что найдено ее почти-решение: полупестрый или точнее почти-пестрый симплекс  $(v^0, \nu)$  такой, что

$$\lambda(v^0), \lambda(v^1), \dots, \lambda(v^n)$$

образуют множество  $[0, n-1]$ . Это означает, что существуют ровно две вершины  $v^k$  и  $v^i$ ,  $i \neq k$  такие, что  $\lambda(v^k) = \lambda(v^i) = n - 1$ . Тогда, построив в триангуляции  $K_1$  симплекс, отличающийся от этого лишь одной вершиной, заменяющей  $k$  (или  $i$ ), можно надеяться, что метка новой вершины будет равна  $n$  и, следовательно, новый симплекс будет пестрым.

Такие правила перехода от одного симплекса к другому, соседнему, называются *правилами перехода*. Из алгоритмических соображений они должны быть достаточно простыми, чтобы их применение не занимало большого времени и триангуляция  $K_1$  имеет очень простые правила перехода. Для наглядности описания этих правил перехода последовательность  $v^0, v^1, \dots, v^n$ , соответствующая (13) будем рассматривать как некоторый путь из начальной вершины  $v^0$  в конечную вершину  $v^n = (v_1^0 + 1, v_2^0 + 1, \dots, v_n^0 + 1)$ , удовлетворяющий естественным ограничениям монотонности:  $v^{k+1} \geq v^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Пусть для определенности мы решаем заменить вершину  $v^k$ . Следует различать 3 разных случая:

1.  $0 < k < n$ , т.е. вершина  $v^k$  является внутренней вершиной пути  $v^0 \rightarrow v^1 \rightarrow \dots$ ,
2.  $k = 0$ , т.е. вершина  $v^k$  является стартовой вершиной и
3.  $k = n$ , т.е. вершина  $v^k$  является конечной вершиной пути.

$0 < k < n$  Первый случай является, пожалуй, наиболее простым. В этом случае имеет место ситуация, изображенная на рис. 6. Заметим, что переставив местами  $e^{\nu_k}$  и  $e^{\nu_{k+1}}$  мы, с одной стороны, получим допустимый монотонный путь, а с другой стороны не изменим вершины  $v^{k+1}$  и, следовательно, и последующих. Вершина  $v^k$  при этом, однако, изменится и результирующий путь будет выглядеть как представлено на рис. 6б. С точки зрения перестановок новый симплекс  $(v^0, \nu')$  будет иметь перестановку  $\nu'$  отличающуюся от  $\nu$  переменных местами  $\nu_k$  и  $\nu_{k+1}$ . Стартовые вершины у этих симплексов одинаковые.

$k = 0$  В этом случае необходимо заменить вершину  $v^0$ , оставим остальные вершины пути неизменными. Это можно сделать, удалив  $v^0$  и перенеся сдвиг  $e^{\nu_1}$  в конец получившегося пути.

С точки зрения путей полученный симплекс соответствует пути, показанному на рис. 7, где  $\tilde{v}^n = v^n + e^{\nu_1}$ , а с точки зрения перестановок - циклическому сдвигу влево исходной перестановки  $V$ . Заметим, что при этом начальной вершиной становится  $v^1$ , а конечная вершина  $v^n$  меняется на  $\tilde{v}^n = v^n + e^{\nu_1}$ .

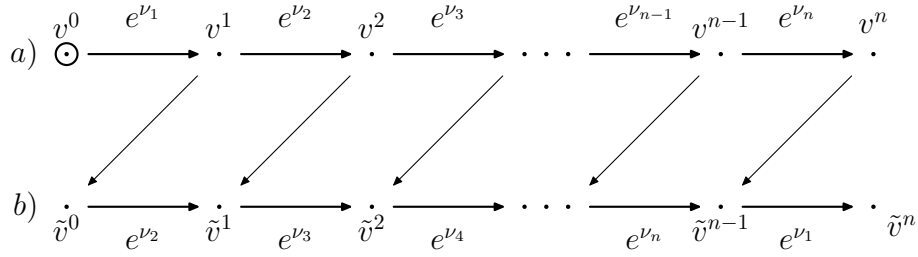


Рис. 7: Замена начальной вершины пути.

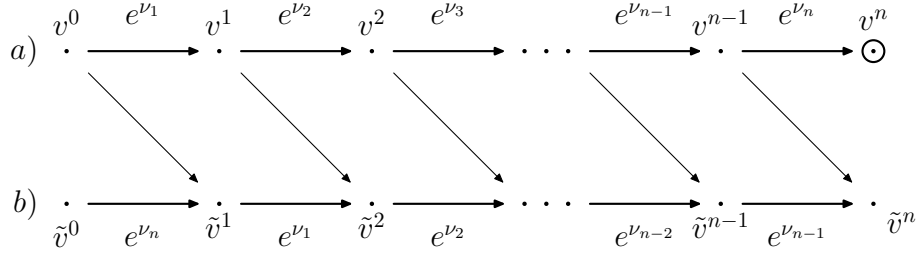


Рис. 8: Замена конечной вершины пути.

$k = n$  В этом случае можно сдвинуть вершины пути на единицу вправо, с переносом сдвига в направлении  $e^{\nu_n}$  в начало пути. Однако, чтобы этот сдвиг не изменял  $v^0$ , исходную вершину нового пути необходимо положить равной  $\tilde{v}^0 = v^0 - e^{\nu_n}$ . Конечно, такой преобразование можно сделать если прежняя вершина  $v^0$  имеет достаточный запас по  $\nu_n$ -ому координатному направлению. Соответствующее преобразование пути и перестановки показано на рис. 8.

После получения новой вершины вычисляется ее метка и полученный симплекс проверяется на "пестроту". Заметим, что в приведенных рассуждениях то что метка удаленной вершины равна  $n - 1$  не имело никакого значения. Существенным было наличие в наборе  $\lambda(v^0), \lambda(v^1), \dots, \lambda(v^n)$  двух одинаковых меток, какую-либо из них мы попытались изменить так, чтобы новый симплекс был пестрым. Поэтому в новом симплексе метка новой вершины может быть не равной  $n - 1$ , а либо быть  $n$  — в этом случае найден пестрый симплекс, либо равный какому-либо значению их множества  $[0, \dots, n - 1]$ . В последнем случае кандидатом на удаление является вершина из прежнего набора с дублирующей меткой и процесс очевидным образом продолжается.

### 3.3.2 Другие триангуляции

## 3.4 Алгоритмика

Пусть  $\mathcal{T} = (\mathcal{Z}, \mathcal{A}, \mathcal{S})$  — некоторая фиксированная триангуляция и рассмотрим работу алгоритма направленного перебора почти-пестрых симплексов, описанного выше. Для этого полезно представить связи между этими симплексами в виде графа  $G = (V, E)$ , где  $V \subset \mathcal{S}$  — множество вершин,  $E$  — множество ребер, которое мы опишем далее.

Пусть вершинами  $v \in V$  являются симплексы, принадлежащие одному из двух множеств  $C_1$  и  $C_2$ . Множество  $C_1$  — это множество симплексов, размерности  $n - 1$ , которые пронумерованы метками  $1, 2, \dots, n$ , а множество  $C_2$  — это множество почти-пестрых или пестрых симплексов размерности  $n$ . Будем считать, что вершины  $v' \in C_1$  и  $v'' \in C_2$  соеди-

нены ребром  $e \in E$  тогда и только тогда, когда  $v'$  является гранью  $v''$  или, что все равно, что  $v' \subset v''$ .

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 10** *Каждая вершина  $V$  имеет степень  $\rho(v)$  не более 2 и  $\rho(v) = 1$  только если либо  $v \in \Delta_n^n$ , либо  $v$  — пестрый симплекс.*

**Доказательство.** Если  $v \in C_2$  — пестрый симплекс, то у него существует только одна грань  $v'$ , размерности  $n - 1$ , размеченная числами  $1, 2, \dots, n$ . По построению, такая грань принадлежит  $C_1$  и, следовательно,  $\rho(v) = 1$ . Если  $v \in C_2$  — почти-пестрый, то существуют ровно 2 таких грани  $v', v'' \in C_1$ , поэтому  $\rho(v) = 2$ .

Если  $v \in C_1$  и  $v \in \Delta_n^n$ , то в силу леммы 5 существует лишь один симплекс  $v'$  размерности  $n$  такой, что  $v \subset v'$ . Симплекс  $v'$  может быть лишь пестрым или почти-пестрым, то есть в любом случае  $v' \in C_2$  и, следовательно,  $\rho(v) = 1$ .

Если  $v \in C_1$  и  $v \notin \Delta_n^n$ , то у  $v$ , опять-же в силу леммы 5, есть ровно два соседних симплекса размерности  $n$ , каждый из которых может быть только пестрым или почти-пестрым. Отсюда следует, что  $\rho(v) = 2$ , что завершает доказательство. ■

### 3.5 Построение стартового симплекса

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении п/пестрого  $n$ -симплекса, с которого можно было бы начать процесс. Такой симплекс можно было бы построить, последовательно наращивая размерность: построив в  $k$ -мерном пространстве пестрый симплекс, можно дополнить его сдвигом в  $(k + 1)$ -ом измерении и получить  $(k + 1)$ -мерный симплекс, по построению являющийся по крайней мере п/пестрым.

Рассмотрим этот процесс в деталях.

**Начальный шаг.** Выберем нулевую вершину начального большого  $n$ -мерного симплекса  $\Delta_n$  в качестве 0-мерного стартового симплекса. По определению этот симплекс является пестрым. Положим  $n = 0$ .

**Шаг увеличения размерности.** Дополнив  $k$ -путь  $v^0 \rightarrow v^1 \rightarrow \dots \rightarrow v^k$  сдвигом в  $(k + 1)$ -ом измерении  $e^{k+1}$ , получим путь

$$v^0 \rightarrow v^1 \rightarrow \dots \rightarrow v^k \rightarrow v^{k+1}$$

и вычислим метку новой вершины  $v^{k+1}$ .

Если  $\lambda_{k+1} \notin \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ , то симплекс со  $v^0, v^1, \dots, v^{k+1}$  будет п/пестрым и с него можно начать процесс направленного перебора п/пестрых симплексов, который должен завершиться построением пестрого  $(k + 1)$ -симплекса или (о ужас!) второго  $k$ -мерного пестрого симплекса с тем же набором меток и, следовательно, лежащего на той же исходной грани. Пример такой ситуации изображен на рис.х

К сожалению, единственным выходом из этой ситуации является поиск другого пестрого  $k$ -симплекса на исходной грани. Поскольку число таких симплексов нечетно, такой симплекс обязательно существует. В силу тех же аргументов нечетности на этой грани, найдется пестрый  $k$ -симплекс, старт с которого приведет к пестрому  $(k + 1)$ -симплексу. Заметим, что поскольку множество меток при всех этих переходах не уменьшается, мы не можем выйти на другую  $k$ -грань исходного симплекса.

**Конец цикла** Если  $k + 1 < n$  увеличить  $k \rightarrow k + 1$  и повторить предыдущий шаг.

## 4 Приложения

В этом разделе будут рассмотрены два наиболее значимые с точки зрения экономики приложения теории неподвижных точек: модель экономики чистого обмена Вальраса и задача нелинейной комплементарности.

### 4.1 Модель чистого обмена

В модели рассматриваются  $m$  экономических агентов, распоряжающихся  $n + 1$  видом товаров. В начальный момент предполагается, что каждый ( $i$ -ый) агент имеет в своем распоряжении запас  $W^i$  этих продуктов и хотел бы улучшить свое благосостояние, обменяв часть своих продуктов на другие. Благосостояние понимается в смысле наличия у каждого из агентов своего отношения предпочтения  $\succ_i$ . В духе рыночной экономики будем считать, что обмен управляется некоторыми ценами  $p = (p_1, p_2, \dots, p_{n+1}) \geq 0$  так, что эквивалентный обмен между  $i$ -ым и  $j$ -ым и продуктами совершается в количествах  $x_i$  и  $x_j$  таких, что  $p_i x_i = p_j x_j$ .

Соответственно возможные варианты обмена  $x$  для  $i$ -го агента должны удовлетворять неравенству

$$px \leq pW^i$$

где  $W^i$  — первоначальные запасы  $i$ -го агента.

Предположим, что отношение предпочтения для каждого агента индуцирует функцию спроса  $d^i(p)$ , которая для заданного варианта цен  $p$  определяет наиболее предпочтительный вариант выбора обмена. Это весьма сильное предположение и более того, мы будем считать, что  $d^i(p)$  — непрерывная функция. Эти предположения выполняются, например, если отношение предпочтения  $\succ_i$  соответствует строго выпуклой функции полезности  $U(x)$ .

Бюджетное множество возможных вариантов обмена для  $i$ -го агента

$$B_i = \{x : px \leq pW^i\}$$

и соответственно  $d^i(p)$  не зависят от масштаба цен, поэтому можно рассматривать цены, ограниченные симплексом  $\Delta_n$ .

Если предпочтения агентов монотонны по количеству товара, то на самом деле имеет место равенство  $pd^i(p) = pW^i$ . Суммируя это равенство по агентам получаем

$$\sum_{i=1}^m pd^i(p) = p \sum_{i=1}^m d^i(p) = pd(p) = \sum_{i=1}^m pW^i = p \sum_{i=1}^m W_i = pW, \quad (14)$$

где  $W = \sum_{i=1}^m W_i$  — представляет собой совокупный запас товаров в системе, а  $d(p) = \sum_{i=1}^m d^i(p)$  — совокупный спрос. Соотношение (14) называется законом Вальраса <sup>14</sup> в сильной форме.

Если ввести функцию избыточного спроса  $g(p) = d(p) - W$ , то закон Вальраса может быть переписан в виде

$$pg(p) = 0 \quad (15)$$

для  $p \in \Delta_n$ .

Все допустимые варианты обмена, устраивающие экономических агентов, при условии свободы выбора экономических агентов должны удовлетворять закону Вальраса. Условие материального баланса требует, однако, чтобы  $g_k(p) \leq 0$  для всех  $k$ , но такое требует специального выбора цен  $p$ .

<sup>14</sup><http://www.cooperativeindividualism.org/walrasbio.html>

**Определение 2** Цены  $p^* \in \Delta_n$  такие, что

$$p^* g(p^*) = 0, \quad g(p^*) \leq 0$$

называются равновесными.

На ключевой вопрос экономики о существовании равновесных цен отвечает следующая теорема.

**Теорема 4** Равновесные цены существуют.

**Доказательство.** Идея доказательства — в построении такого ценового отображения  $Q : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ , неподвижной точкой которого была бы равновесная цена  $p^*$ . Смыслу экономических механизмов соответствовало бы нечто вроде  $p \rightarrow p + \lambda g(p)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , которое увеличивало бы цены на некоторые товары при их дефиците и уменьшало бы при их избытке. Однако это отображение не сохраняет симплекс, поэтому мы его модифицируем:

$$Q_\lambda(p) = \frac{(p + \lambda g(p))_+}{(p + \lambda g(p))_+ e}, \quad (16)$$

где  $v_+ = (\max(0, v_1), \max(0, v_2), \dots, \max(0, v_{n+1}))$  — покомпонентная положительная срезка векторв  $v$ ,  $e = (1, 1, \dots, 1)$ .

При этом, очевидно,  $Q_\lambda(p) \in \Delta_n$  для всех  $p \in \Delta_n$ , для которых (16) определено. Покажем, что  $p_k + \lambda g_k(p) > 0$  хотя бы для одного  $k$  для тех  $p$  и  $g(p)$ , которые удовлетворяют закону Вальраса.

Действительно, если это не так, то  $p + \lambda g(p) \leq 0$  и умножив на  $p \geq 0$  получим в силу (15)  $\|p\|^2 = 0$ , что невозможно.

Следовательно, знаменатель в (16) отличен от нуля и  $Q_\lambda(p)$  — непрерывна. Отсюда по теореме Брауэра следует, что существует  $p^*$  такой, что  $Q_\lambda(p^*) = p^*$  и мы покажем, что именно этот  $p^*$  является вектором равновесных цен при котором  $g(p^*) \leq 0$ ,

Обозначим  $(p^* + \lambda g(p^*))_+ e = \mu > 0$ , тогда

$$\mu p^* = (p^* + \lambda g(p^*))_+. \quad (17)$$

Если  $p_k^* + \lambda g_k(p^*) \leq 0$ , то в силу (17) и  $p_k^* = 0$ , а стало быть  $g_k(p^*) \leq 0$ . Если  $p_k^* + \lambda g_k(p^*) > 0$ , то и

$$\mu p_k^* = p_k^* + \lambda g_k(p^*) > 0, \quad (18)$$

откуда

$$g_k(p^*) = \frac{\mu - 1}{\lambda} p_k^*$$

Умножая эти равенства на  $p_k^* > 0$  и прибавляя нулевые слагаемые с  $p_k^* = 0$  получим равенство

$$0 = \sum_{k=1}^{n+1} g_k(p^*) p_k^* = \frac{\mu - 1}{\lambda} \|p^*\|^2$$

которое может выполняться лишь при  $\mu = 1$ . При этом из (18) следует  $g_k(p^*) = 0$ .

Таким образом для всех компонент вектора  $g(p^*)$  выполнено  $g_k(p^*) \leq 0$  и, следовательно,  $p^*$  — равновесная цена. ■

Справедливо и обратное утверждение.

**Теорема 5** Равновесные цены  $p^*$  являются неподвижными точками оператора  $Q_\lambda(p)$ , определенного соотношением (16).

**Доказательство.** Утверждение теоремы означает, что если  $p^* \in \Delta_n$  и  $p^*g(p^*) = 0$ , то  $p^*$  — неподвижная точка  $Q_\lambda(p)$ .

Для доказательства теоремы определим два индексных множества  $I_1 = \{i : e_i(p^*) < 0\}$  и  $I_2 = \{i : e_i(p^*) = 0\}$ . Из закона Вальраса следует, что  $p_i^* = 0$  для  $i \in I_1$  и  $p_i^* \geq 0$  для  $i \in I_2$ . Для  $i \in I_1$  получает соответственно, что и

$$0 = p_i^* = (p_i^* + \lambda g_i(p))_+ = 0. \quad (19)$$

Для  $i \in I_2$  также

$$(p_i^* + \lambda g_i(p))_+ = p_i^*. \quad (20)$$

При этом знаменатель оператора  $Q_\lambda(p^*)$

$$(p^* + \lambda g(p^*))_+ e = \sum_{i \in I_1 \cap I_2} (p^* + \lambda g(p^*))_+ = \sum_{i \in I_2} p_i^* = \sum_{i \in I_1 \cap I_2} p_i^* = 1$$

и, следовательно, (19)–(20) в совокупности означают  $p^* = Q_\lambda(p^*)$ . ■

## 4.2 Задача нелинейной комплементарности

Задача нелинейной комплементарности (ЗЛНК) имеет следующий вид: Для заданного отображение  $g : E \rightarrow E$  требуется найти  $x^* \geq 0$  такое, что

$$g(x^*) \geq 0, \quad x^*g(x^*) = 0, \quad (21)$$

С точки зрения существования решений этой задачи отсутствие ограничений компактности на  $x$  представляет специфические осложнения, поскольку позволяет решению "убежать на бесконечность". Для предотвращения этого вводится обычно условие коэрцитивности, позволяющее заранее ограничить область существования решений. Типичным результатом, доказываемым с помощью теоремы Брауэра является следующая теорема.

**Теорема 6** Пусть существует  $c \geq 0, c \in E$  и  $\rho > \|c\|_\infty$  такие, что для всех  $x \geq 0, \|x\|_\infty = \rho$

$$\max_i (x_i - c_i)g_i(x) > 0.$$

Тогда ЗЛНК имеет решение  $x^*$  с  $\|x^*\|_\infty \leq \rho$ .

**Доказательство.** Положим  $h(x) = (x - g(x))_+$ . Тогда  $x^*$  решает (21) тогда и только тогда, когда  $h(x^*) = x^*$ , то есть  $x^*$  является неподвижной точкой  $h$ .

Действительно, если  $h(x^*) = x^*$ , то по крайней мере  $x^* \geq 0$ , Если  $x_i^* = 0$ , то  $h_i(x^*) = (-g_i(x^*))_+ = 0$ , следовательно  $g_i(x^*) \geq 0$  и  $x_i^*g_i(x^*) = 0$ . Если  $x_i^* > 0$ , то  $x_i^* - g_i(x^*) = x_i^* > 0$  и, следовательно,  $g_i(x^*) = 0$ , При этом также  $x_i^*g_i(x^*) = 0$ ,

Следовательно, в любом случае  $g_i(x^*) \geq 0$  и  $x_i^*g_i(x^*) = 0$ , откуда следует, что  $x^* \geq 0$  решает задачу (21).

Обратно, если  $x^*$  решает ЗЛНК (21), то либо  $x_i^* = 0$  либо  $g_i(x^*) = 0$ .

Если  $x_i^* = 0$ , то

$$x_i^* - g_i(x^*) = -g_i(x^*) \leq 0$$

и следовательно,  $h_i(x^*) = (x_i^* - g_i(x^*))_+ = 0 = x_i^*$ ,

Если  $g_i(x^*) = 0$ , то

$$x_i^* = x_i^* - g_i(x^*) = (x_i^* - g_i(x^*))_+ = h_i(x^*),$$

т.е. в любом случае  $h_i(x^*) = x_i^*$  и следовательно  $x^*$  — неподвижная точка  $h$ .

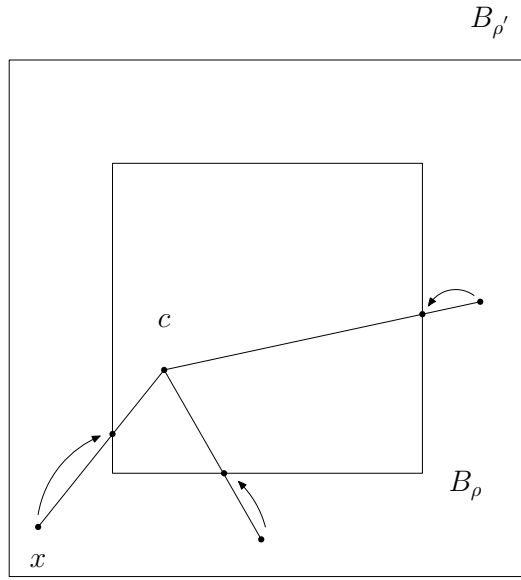


Рис. 9: Действие ретракта на внешний куб

Пусть  $B_\rho = \{x : \|x\|_\infty \leq \rho\}$ ,  $D_\rho = B_\rho \cap h(B_\rho)$  и пусть  $\rho'$  достаточно велико, так что  $D_\rho \subset B_{\rho'}$ .

Пусть  $c \in \text{int } B_\rho \cap E_+$  и отображим  $B_{\rho'} \rightarrow B_\rho$  с помощью ретракта  $r(x)$ :

$$r(x) = \begin{cases} x & \|x\|_\infty \leq \rho, \\ \lambda x + (1 - \lambda)c & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (22)$$

где

$$\lambda = \min_{x_i > \rho} \frac{\rho - c_i}{x_i - c_i} \leq 1. \quad (23)$$

Легко видеть, что  $\|r(x)\|_\infty = \rho$  для  $x \notin B_\rho$ . На Рис. 9 продемонстрировано действие этого ретракта на точки  $B_{\rho'} \setminus B_\rho$ .

Положим  $h_r(x) = h(r(x))$  тогда  $h_r(x) : B_{\rho'} \rightarrow B_\rho \subset B_{\rho'}$  и в силу теоремы Брауэра существует  $x^*$  такое, что  $h_r(x^*) = x^*$ .

Если  $x^* \in B_\rho$  то  $h(x^*) = h_r(x^*) = x^*$  и теорема доказана.

Если  $x^* \notin B_\rho$  то рассмотрим  $y^* = r(x^*)$  и заметим, что  $\|y^*\|_\infty = \rho$ .

Точка  $z^* = (x^*, y^*)$  по построению является неподвижной точкой отображения  $H : E \times E \rightarrow E \times E$  где

$$H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(y) \\ r(x) \end{pmatrix}$$

Пусть  $k$  такого, что

$$0 < \max_i (y_i^* - c_i) g_i(y^*) = (y_k^* - c_k) g_k(y^*)$$

Тогда либо  $y_k^* - c_k > 0, g_k(y^*) > 0$  либо  $y_k^* - c_k < 0, g_k(y^*) < 0$

Если  $y_k^* - c_k > 0, g_k(y^*) > 0$  то из  $y_k^* = \lambda x_k^* + (1 - \lambda)c_k$  для некоторого  $\lambda \in (0, 1]$  следует, что

$$x_k^* = \frac{1}{\lambda} y_k^* - \frac{1 - \lambda}{\lambda} c_k > \frac{1}{\lambda} y_k^* - \frac{1 - \lambda}{\lambda} y_k^* = y_k^*.$$

При этом  $x_k^* > y_k^* > (y_k^* - g_k(y^*))_+ = h(y^*)$  и, следовательно,  $(x^*, y^*)$  не может быть неподвижной точкой  $H$ ,

Если  $y_k^* - c_k < 0, g_k(y^*) < 0$  то

$$x_k^* = \frac{1}{\lambda} y_k^* - \frac{1-\lambda}{\lambda} c_k < \frac{1}{\lambda} y_k^* - \frac{1-\lambda}{\lambda} y_k^* = y_k^*.$$

и

$$x_k^* < y_k^* < y_k^* - g_k(y^*) = (y_k^* - g_k(y^*))_+ = h_k(y^*)$$

и аналогично  $(x^*, y^*)$  не может быть неподвижной точкой  $H$ , Это противоречие доказывает, что  $x^* \in B_\rho$  и, следовательно,  $x^* = h(x^*)$ , то есть  $x^*$  является решением ЗНЛК.



Таблица 1: Параметры функций спроса и начальное распределение товаров

	Параметры функций спроса					Начальное распределение			
	Уч-1	Уч-2	Уч-3	Уч-4	$d_0$	Уч-1	Уч-2	Уч-3	Уч-4
Продукт-1	0.2	15.3	34.5	51.2	95	105	113	106	108
Продукт-2	29.8	8.6	35.7	49.1	147	99	98	135	154
Продукт-3	24.1	37.5	59.9	16.0	126	126	96	104	99
Продукт-4	31.8	57.1	34.2	38.2	139	109	246	220	100
Продукт-5	46.3	31.1	51.6	22.2	106	152	128	374	128

## 5 Вопросы на сообразительность

1. Показать, что суперпозиция гомеоморфизмов — гомеоморфизм.
2. Показать, что если  $s$  — гомеоморфизм, то и  $s^{-1}$  — гомеоморфизм.
3. Показать, что функции Минковского (3) положительно однородна:  $\mu(\theta x) = \theta\mu(x)$  при  $\theta > 0$  и выпукла.
4. Проверить, является ли гомеоморфизм  $n$ -клетки  $n$ -клеткой.
5. Построить какой-либо гомеоморфизм  $C_n$  и  $U$ .

## 6 Практическая работа

Используя теорию и алгоритмы поиска неподвижных точек найти равновесную цену в модели чистого обмена с 4-мя участниками и 5 продуктами. Зависимость спроса на продукты от нормализованного уровня цен  $p$  имеет вид  $d(p) = d_0 - Hp$ , где вектор предельного спроса  $d_0$  и матрица  $H$  заданы табл. 1 В этой же таблице задано и начальное распределение товаров между участниками.

## Список литературы

- [1] Дебре Ж. Четыре аспекта математической теории экономического равновесия // УМН, 32:1(193) (1977), 131–144
- [2] Шашкин Ю. А. Неподвижные точки М.: Наука 1989 81 с.
- [3] Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения М.: Едиториал УРСС, 2003. 176 с.
- [4] Лотов А. Введение в экономико-математическое моделирование М.: Наука, 1984. 392 с.
- [5] Понтрягин Л.С. Основы комбинаторной топологии. Изд.4 М.: Едиториал УРСС, 2004. 136 с.
- [6] Zong Chuanming What is known about unit cubes// Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 2005, v. 42, 2, 181-211.
- [7] Лейхтвейс К. Выпуклые множества М.: Наука, 1985. 336 с.
- [8] Тодд М. Дж. Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике М.: Наука, 1983 .- 112 с.