Группы 234, 236, 237, 238

Участники: гр. 234: Богза, Буткевич, Комов, Луценко, Макаркин, Никитенко, Павлов, Трофимов, Ярусов; гр. 236: Елизаров, Пак, Пинчук, Полицын, Харитонов, Цыбенко; гр. 237: Боковая, Горбачева, Качанова, Коберник, Кремлев, Крылов, Лебедева, Лукащук, Муравьева, Овчинников, Тарасов, Хазинуров, Ящев; гр. 238: Беховский, Болдырев, Дмитриев, Еременко, Микшин, Павлов, Цепелев

Общая информация: Решения задач представляются в письменном виде на стандартных листах A4, заполненных с одной стороны. Изложение должно быть по существу и разборчиво (подготовка в системе TeX приветствуется). Тексты программ и протоколы их работы должны давать адекватное представление о работе алгоритма и ходе вычислений. Аналитические выкладки должны быть приведены достаточно подробно. Особо прошу обратить внимание на охрану интеллектуальной собственности, работы с явными признаками копирования друг у друга не будут засчитываться.

Работы сдавать в подписанных (ФИО, группа) конвертах в к. 344 инженеру кафедры ЭММ Огневой Марине Григорьевне. Судный день наступит 24 июня.

Вопросы по заданиям можно направлять мне по электронной почте (`nurmi@dvo.ru`) или адресовать преподавателям, которые вели у вас практические занятия.

1 Задачи на понимание

Задача Найти все локальные минимумы и максимумы функции

$$f(x_1, x_2) = \sin x_2 - x_1^2.$$

Задача Описать все конусы допустимых направлений для множества $X \subset E_2$:

$$X = \{(x_1, x_2) : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 4,\ (x_1 + 3)^2 + x_2^2 \leq 9\}$$

Задача Функция $\phi(u) = \min_x L(x, u)$ для функции Лагранжа $L(x, u)$ называется двойственной.
Рассмотреть задачу

$$\begin{gathered} \min\ 2x_1^2 + 3x_2^2 \\ x_1 + x_2 = 1, \end{gathered}$$

определить $\phi(u)$ для функции Лагранжа этой задачи и найти ее максимум.

Задача Рассмотреть задачу

$$\begin{gathered} \min\ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ x_2 \geq x_1^2,\ x_2 \leq 4. \end{gathered}$$

Выписать для данной задачи необходимые условия оптимальности и проверить их выполнение в точке $(2, 4)$. Является ли данная точка оптимальной ?

Задача Рассмотреть задачу

$$\begin{gathered} \min \frac{x_1 + 3x_2 + 3}{2x_1 + x_2 + 6} \\ 2x_1 + x_2 \leq 12, -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

и показать, что любая точка на отрезке прямой между точками (0,0) и (6,0) является оптимальной.

Задача Решить задачу

$$\begin{gathered} \min\ -x_1 + x + 2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 = 0 \\ (x_1, x_2) \in X = \text{co}\{a^1, a^2, a^3, a^4\} \end{gathered}$$

векторы a^1, a^2, a^3, a^4 — столбцы матрицы:

```
-1  0  1  0
 0  1  0 -1.
```

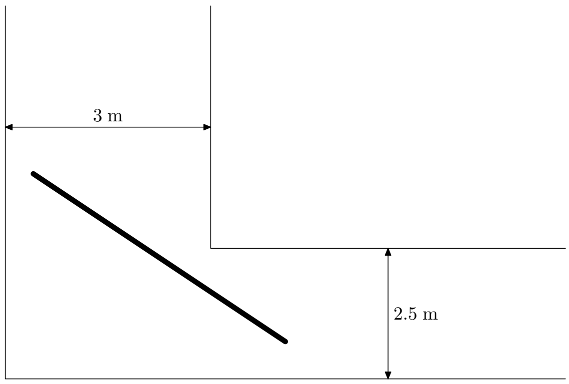

Рис. 1: План коридора.

Задача Используя метод сопряженных градиентов, решить задачу

$$\min_{x_1,x_2,x_3}\ (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (-x_1 + x_2 + x_3)^2,$$

начав с точки $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$.

Задача Решить задачу

$$\begin{gathered} \min\ 2x_1^2 + 7x_2^2 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{gathered}$$

используя штрафную функцию $\Phi_C(z) = Cz^2$. Определить зависимость решения $x_1(C), x_2(C)$ вспомогательной задачи

$$\min_{x_1,x_2} 2x_1^2 + 7x_2^2 + \Phi_C(x_1 + x_2 - 5)$$

от C и найти

$$(x_1^\star, x_2^\star) = \lim_{C\to\infty}(x_1(C), x_2(C)).$$

2 Задача на вынос

Когда математик делал ремонт в своем доме, он столкнулся с проблемой проноса через коридор длинных тонких предметов. Коридор имеет ширину 3 м на входе, затем поворачивает под прямым углом и на выходе имеет ширину 2.5 м (см. рис. 1). Считая высоту потолка 3.5 м определить максимальную длину прямого тонкого предмета (трубы !), который можно пронести через коридор.

3 Вокруг да около

Используя пакет MINOS, на плоскости xy найти эллипсоид минимального объема, содержащий 28 точек, приведенных ниже:

```
===========================================
      x        y              x        y
===========================================
x  1.95123  1.43019 x  0.98050  0.29921
x  0.36928  2.09484 x  2.00956  1.34115
x  0.82185  0.65783 x  1.56669  0.34168
x  1.51152 -0.33324 x  4.04677  0.07268
x  2.01842 -0.01661 x  1.97277  1.46387
x  3.43171  1.79593 x  3.15834  2.07061
x  1.63969  1.14371 x  0.76210  1.98702
x  0.32732  2.23000 x  0.65293  1.84352
x  0.24753  0.49656 x  2.31453  1.98180
x  2.16123 -0.39623 x  3.22727  1.06623
x  1.35276  0.06842 x  0.38865  2.51824
```

```
x  3.44215  1.88521 x  2.11946 -0.27342
x  3.84007  1.48288 x  4.04722  0.17535
x  0.28082  1.39147 x  0.12454  1.89879
============================================
```

Для сведения: эллипсод задается квадратичным ограничением вида

$$E = \{x : (x - x^0)' A(x - x^0) \leq 1\}$$

где A — симметричная положительно определеная матрица 2×2, x^0 — координаты центра эллипсоида. Формулу для обьема эллипса найдите сами.

4 Быстрый Ньютон

Решить аналитически задачу минимизации

$$\min \ x_1^{0.4} x_2^{0.5} x_3^{0.6} \exp\left(-0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3\right).$$

Реализовать на `octave` метод Ньютона и получить численно решение этой задачи, используя начальную точку $(3, 3, 3)$. Определить тип сходимости: линейная, суперлинейная или квадратичная.

5 Проектирование фильтров

При проектировании цифровых устройств возникает задача востроизведения П-образных импульсов волновыми пактами. С точки зрения математики эта задача сводится в непрерывной постановке к минимизации функции вида

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} (\sum_{m=1}^{n} (x_m \sin((m-1)\tau) + y_m \cos((m-1)\tau)) - \theta(\tau - t_1) + \theta(\tau - t_2))^2 d\tau,$$

где n — порядок генератора пакетов (заданый конструктив), $0 < t_1 < t_2 < 2\pi$ — границы П-образного импульса (заданы), $\theta(t)$ — функция Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В дискретизированной по времени постановке интеграл заменяется на сумму и целевая функция приобретает вид

$$f_a(x, y) = \sum_{k=1}^{N} (\sum_{m=1}^{n} (x_m \sin((m-1)\tau_k) + y_m \cos((m-1)\tau_k)) - \theta(\tau_k - t_1) + \theta(\tau_k - t_2))^2,$$

где $\tau_k = 2\pi \frac{k-1}{N-1}, k = 1, 2, \ldots, N$, N - характеристика несущей частоты (достаточно взять, например, $N = 1024$).

Итого получаем простую задачу безусловной квадратичной минимизации для $2n$ переменных:

$$\min_{x,y} f_a(x, y) = f_a(x^\star, y^\star).$$

Задачу решить методом сопряженных градиентов при $n = 16, N = 1024, t_1 = 0.75, t_2 = 3.8$.

В качестве отчета предьявить:

1. программу на octave (оригинальную, копии взаимно уничтожаются),
2. численные зачения $x^\star, y^\star$ с убедительным доказательством их оптимальности,
3. график $\psi(t) = \sum_{m=1}^{n} (x_m^\star \sin((m-1)t) + y_m^\star \cos((m-1)t)$, $\quad t \in [0, 2\pi]$ при вычисленных значениях $x^\star = (x_1^\star, x_2^\star, \ldots, x_n^\star), y^\star = (y_1^\star, y_2^\star, \ldots, y_n^\star)$.
4. **(самое важное !)** ясное понимание того, как задача решалась.

Рис. 2: Места и координаты ДТП.

№	x	y
Угол ул. Светланской и Океанского пр.	10.0	50.6
Угол ул. Русской и пр.а 100 лет Владивостоку	80.3	80.6
пл. Луговая	23.7	78.4
ост. Гоголя	35.8	53.6
пл. Баляева	54.2	62.0
ост. 1-ая речка	63.3	90.2
угол ул. Бестужева и ул. Морской	75.1	30.1
угол ул. Некрасовская и пр. 100 лет Владивостоку	29.7	21.4
ост. 3-я Рабочая	84.8	18.8
ул. Пушкинская, 60	77.9	25.3

6 Размещение станции скорой медицинской помощи

В городе N существут проблема с размещением станции скорой помощи, которая должна обеспечивать максимально короткое время прибытия бригады врачей на место ДТП. По результатам обработки статистики выделено 10 мест наиболее часто происходящих ДТП, координаты которых представлены в табл. 2. Считая, что время проезда от точки (x_1, y_1) до точки (x_2, y_2) пропорционально $|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p$ с $p = 1.8$ и используя программный пакет MINOS, определить место оптимального размещения станции, при котором обеспечивается минимальное из максимальных времен реагирования на вызов.

Успехов ! Е.А. Нурминский