Эффективная экономика

Н.Е. Известный

Зурбаган, Мартобря 41
Без года

В этом разделе мы рассмотри замктурый экономический универсум, оперирующий конечныи набором безгранично делимых продуктов. Обозначая количество i-го продукта через x_i, получаем возможность характиризовать различного назначения наборы продуктов через вектора конечномерного пространства $x \in E$.

С точки зрения экономиста, заинтересованного лишь в начальных затратах и конечном результате производства технологический процесс — это нечто вроде "черного ящика" (x, y), где x — ресурсы или продукты, потребляемые в процессе производства, а y — выпускаемая продукция. Такую пару можно назвать технологическим процессом и в наших обозначениях $(x, y) \in E \times E$.

Множество всех возможных в данное время и в данном месте технологических процессов будем обозначать $T \subset E \times E$ и называть технологическим множеством.

Для пояснение приведем пример технологического множества модели Леонтьева. Если обозначить результат (валовой выпуск) модели Леонтьева через y, то, соответственно, для обеспечения такого выпуска потребуется Ay исходных продуктов, где A — матрица прямых затрат. Следовательно, технологическое множество модели Леонтьева — это множество пар вида $(Ay, y), y \geq 0$, которое представляет собой выпуклый многогранный конус.

Скорее всего в данном технологическом процесс нас заинтересует чистый выпуск $y - x \geq 0$. Та же модель Леонтьева, в силу ее линейности может быть характиризована в термиках чистого выпуска как

$$T' = \{z : (I - A)z\}.$$

Можно выделить существенные с точки зрения экономиста черты технологических множеств.

- $\alpha T \subset T$ — (при $0 \leq \alpha \leq 1$?)
- T — выпукло. Это свойство называется отсутствием внешней неэкономичности. В этом случае эффективным оказывается совместное использование нескольких технологических процессов, т.е., если

  $$(x^1, y^1) \in T, (x^2, y^2) \in T$$

  и $\lambda \in [0, 1]$ то

  $$(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, \lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2) = (x_\lambda, y_\lambda) \in T$$

  и, возможно, существует $x_\lambda, z) \in T$ с $z \geq y_\lambda)$, т.е. от совместного использования 2 процессов эффективность производства растет.
- Не существует "рога изобилия", "скатерти-самобранки" и т.п.: $(0, y) \in T$ влечет $y = 0$.
- Необратимость: если $(x, y) \in T$, то $(y, x) \in T$.

- Свободное расходование: если $(x, y) \in T$, то $(x, y') \in T$ для $y' \leq y$.

Важнейшим принципом выбора решений в экономике является рациональность, т.е. стремление получить максимальный результат.

Определение 1 *Процесс (x, y) более эффективен, чем (u, v) если $x \leq u, y \geq v$.*

Отношение эффективности является отношением частичного порядка, поэтому для него можно определить понятие аналогичное понятию максимума.

Определение 2 *Процесс (x, y) называется эффективным, если в T не существует более эффективного процесса (u, v).*

Понятие эффективности можно соотнести с понятием доходности или прибыльности.

Теорема 1 *Пусть T — технологическое множество. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если для некоторого $p > 0$ процесс $(x^\star, y^\star)$ максимизирует прибыль $p(y - x)$ для всех $(x, y) \in T$ то $(x^\star, y^\star)$ — эффективен;*
2. *Пусть T — выпукло. Тогда, если $(x^\star, y^\star)$ — эффективный процесс, то существует $p \geq 0$ такое, что $p(y^\star - x^\star) = \max_{(x,y)\in T} p(y - x)$.*

Доказательство.Докажем 1). Если существует процесс $(x^{\star\star}, y^{\star\star})$, более эффективный, чем $(x^\star, y^\star)$, то $(x^\star\star, -y^\star\star) \leq (x^\star, -y^\star)$ и хотя бы для одного i либо $x_i^{\star\star} < x^\star$ либо $-y_i^{\star\star} - < y^\star$.

Тогда для $p > 0$

$$p(y^{\star\star} - x^{\star\star}) = p(y^\star - x^\star) - p(y^{\star\star} - x^{\star\star}) - p(y^\star - x^\star) = p(y^\star - x^\star) - p(y^{\star\star} - py^\star) - p(x^{\star\star} - x^\star) > p(y^\star - x^\star)$$

что противоречит оптимальности $(x^\star, y^\star)$.

Теперь 2). Пусть $Z = \{(x^\star, y^\star) - T\}$. Очевидно, что Z — выпукло. Поскольку $(x^\star, y^star)$ — эффективный процесс, то $(0, 0) \notin int(Z)$ и, следовательно, в силу одной из форм теорем отделимости существует p такое, что $pz \geq 0$ для любого $z \in Z$.

Из ограничености снизу правой части следует, что $p \geq 0$. С другой стороны, вычисляя инфимум правой части по $z \in Z$ получим $p(z^\star - z) \geq 0$ для любого $z \in T$ или $pz^\star \geq pz$ при $z \in T$, т.е. $(x^\star, y^\star)$ максимизирует pz на T. ■.

В приведенной теореме в части 2 не гарантируется $p > 0$. Оно и на самом деле может не выполняться, как показывает следующий пример.

Пример.

$$T = \{(x_1, x_2) : x1 + x_2^2 \leq 0, x_2 \geq 0\},$$

процесс $(0, 0)$.

Для того, чтобы цены были положительными достаточно выполнение простых дополнительных условий.

Теорема 2 *Если T — выпуклый замкнутый конус и $(0, 0)$ — эффективный процесс, то существует $p > 0$ такое, что $px \geq 0$ для всех $x \in T$.*

Доказательство.

■

Замечание Эффективность $(0, 0)$ означает несуществование "рога изобилия".

0.1 Теоерма о (не)заменимости

В модели Леонтьева есть очень сильное на первый взгляд предположение о постоянстве коэффициентов затрат a_{ij}. В мире, где существует масса технологий для производства одних и тех же товаров, такое предположение вызывает большое сомнение.

На самом деле существенными являются следующие особенности модели Леонтьева:

- В каждом процессе производится только один продукт;
- Есть один незаменимый ресурс, используемый во всех технологических процессах.

В этих предположениях существует представительные процессы такие, что множество эффективных процессов является их смесью.

Для последующего нам потребуются следующие обозначения:

$$T_+ = \{(\lambda, y - x) : y - x \geq 0, (\lambda, x, y) \in T$$

Множество T_+ представляет собой продуктивную часть всего технологического множества T.

Кроме этого, нам понадобятся определенные подмножества T_+. Рассмотрим некоторый процесс $(\omega, c) \in T_+$ и определим множество других процессов, более эффективных, чем этот:

$$T_+(\omega, c) = \{(\lambda, y - x) : \lambda \leq \omega, y - x \geq c\} \cap T_+.$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 1 *Множество $T_+(\omega, c)$ замкнуто и ограничено.*

Доказательство.Если $T_+(\omega, c)$ неограничено, то существует последовательность $\{(\lambda_k, y^k - x^k) \in T_+(\omega, c)$ такая, что $\|y^k\| \to \infty$. Каждый член этой последовательности может быть разложен по базовым процессам, производящим определенные продукты:

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k, \quad y_k = \sum_{j=1}^{n} y_j^k, \quad x_k = \sum_{j=1}^{n} x_j^k. \tag{1}$$

По определению $T_+(\omega, c)$ величины λ_k ограничены ω, а из неотрицательности λ_j^k следует, что $\lambda_j^k \leq \omega$. Аналогично и .

Нормируя (1) на $\|y^k\|$ и учитывая то, что каждое T_j является конусом, получаем

$$(\frac{\lambda_j^k}{\|y^k\|}, \frac{x_j^k}{\|y^k\|}, \frac{y_j^k}{\|y^k\|}) = (\tilde{\lambda}_j^k, \tilde{x}_j^k, \tilde{y}_j^k) \in T_j$$

где $\|\tilde{x}_j^k\| \leq 1, \|\tilde{y}_j^k\| \leq 1$. Переходя к пределу по $k \to \infty$ получим $(0, \tilde{x}_j, \tilde{y}_j) \in T_j$, откуда $\tilde{y}_j = 0$ в силу необходимости незаменимого ресурса. Однако

$$\|\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j^k\| = \|y^k\| / \|y^k\| = 1$$

и, следовательно $\tilde{y}_j$ не могут быть все одновременно нулями. Полученное противоречие доказывает ограниченность $T_+(\omega, c)$.

Для того, чтобы доказать замкнутость предположим, что $(\lambda_k, y^k - x^k)$ — последовательность процессов из $T_+(\omega, c)$, такая, что $(\lambda_k, y^k - x^k) \to (\lambda, d)$ при $k \to \infty$. В силу ограниченности $T_+(\omega, c)$ можно считать, что и $\lambda_j^k, y_j^k, x_j^k$ в представлении (1) сходятся к некоторым пределам $\tilde{\lambda}_j, \tilde{y}_j, \tilde{x}_j$. Тогда $(\lambda, d) = \sum_{j=1}^n (\tilde{\lambda}_j, \tilde{y}_j - \tilde{x}_j)$, где $(\tilde{\lambda}_j, \tilde{y}_j, \tilde{x}_j) \in T_j$ в силу замкнутости T_j. Из эффективности (λ_k, y^k, x^k) следует, что $\lambda = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j \le \omega, \sum_{j=1}^n (\tilde{y}_j - \tilde{x}_j) \ge c$, т.е. $(\lambda, d) \in T_+(\omega, c)$. ■

После того, как мы доказали компакность $T_+(\omega, c)$ мы можем находить эффективные процессы с помощью цен.

Лемма 2 *Пусть $p > 0$ и $(\bar{\lambda}, \bar{y}, \bar{x})$ — решение задачи*

$$\max_{(\lambda,y,x)\in T_+(\omega,c)} p(y-x) - \lambda$$

тогда $(\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{y})$ — эффективный в T_+ процесс.

Доказательство.. Действительно, предположим, что в T_+ существует процесс (λ, x, y), такой, что

$$\lambda \le \bar{\lambda} \le \omega, c \le \bar{y} - \bar{x} \le y - x \tag{2}$$

Как видно при этом $(\lambda, x, y) \in T_+(\omega, c)$ и, следовательно, поиск более эффективных, чем $(\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{y})$ процессов можно заведомо ограничить $T_+(\omega, c)$. Вместе с тем, поскольку по крайней мере одно из неравенств (2) строгое, то

$$p(y-x) - \lambda > p(\bar{y} - \bar{x}) - \bar{\lambda},$$

что невозможно в силу определения $(\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{y})$. ■

Лемма 3 *Множество эффективных проецессов — конус, т.е., если $(\bar{\lambda}, \bar{y}, \bar{x})$ — эффективный процесс, то и $\theta(\bar{\lambda}, \bar{y}, \bar{x})$ при $\theta > 0$ также эффективный.*

Доказательство.Действительно, если существует (λ, y, x), эффективнее, чем $\theta(\bar{\lambda}, \bar{y}, \bar{x})$, то

$$\lambda \le \theta\bar{\lambda}, y - x \ge \theta(\bar{y} - \bar{x}). \tag{3}$$

Предположим первоначально и разделим неравенства (3) на θ. Используя эффективность $(\bar{\lambda}, \bar{y}, \bar{x})$ получим $\lambda = \theta\bar{\lambda}, y - x = \theta(\bar{y} - \bar{x})$, следовательно $(\lambda, y, x) = \theta(\bar{\lambda}, \bar{y}, \bar{x})$. Если $\theta = 0$, то $\lambda = 0$ влечет $y = x = 0$ и, следовательно, $(\lambda, y, x) = (0, 0, 0) = 0(\bar{\lambda}, \bar{y}, \bar{x})$, что окончательно доказывает. ■

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема 3 *Если технология T продуктивна в том смысле, что T_+ содержит процесс с положительным чистым выпуском продукции, то существуют процессы $(1, \hat{y}_j, \hat{x}_j), j = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяющие следуюющим условиям:*

1. *Множество T_+^e всех эффективных процессов (λ, y, x) из T_+ совпадает с конической оболочкой $(1, \hat{y}_j, \hat{x}_j), j = 1, 2, \ldots, n)$;*

2. *Для любого неотрицательного вектора конечного спроса d существует неотрицательное число λ, такое, что $(\lambda, d) \in T_+^e$.*

Доказательство.По предположению теоремы существует $(\mu, e) \in T_+$ с $e > 0$. Тогда в $T_+(\mu, e)$ есть эффективный процесс $(\bar{\lambda}, \bar{y}, \bar{x})$, который, например, можно получить, максимизируя прибыль $p(y - x) - \lambda$ для $p > 0$. Очевидно, что при этом $\lambda > 0$, иначе неравенству $y - x \ge e > 0$ невозможно было бы удовлетворить. По лемме 3 этот процесс можно перенормировать и иметь дело с эффективным процессом $(1, \bar{y}, \bar{x})$.

Как и любой процесс в T он может быть разложен по базовым процессам

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j,\ \bar{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j,\ \bar{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

где, в силу специфики модели Леонтьева должно быть $\lambda_j > 0$ для всех j. В противном случае, если для какого-то j' соответствующая доля ресурса $\lambda_{j'} = 0$, то $y_{j'} = 0$ и продукт j' просто не выпускается. Последнее противоречит $y_{j'} - x_{j'} \geq e_{j'} > 0$.

Отнормировав далее и сами базовые процессы (λ_j, y_j, x_j) получим набор $(1, \hat{y}_j, \hat{x}_j)$ соответствующим образом переобозначив y_j, x_j. Покажем, что это и есть искомый набор процессов, порождающих T_+^e. Пусть матрица D составлена из столбцов $y_j - x_j, j = 1, 2, \ldots, n$

$$D = \|y_j - x_j, j = 1, 2, \ldots, n\| = Y - X$$

Легко видеть, что $d_{ij} \leq 0$ для $i \neq j$, поскольку Y — диагональная матрица. Обозначив через l вектор, компонентами которого являются $\lambda_j, j = 1, 2, \ldots, n$, получим

$$y - x = Dl > 0$$

Следовательно, по теореме Фробениуса-Перрона D положительно обратима.