Лекция 3. Динамичская модель Леонтьева

Е.А. Нурминский

1 Матричные мультипликаторы

Определим $A \geq 0$ поэлементно. Матрицу B будем называть неотрицательно обратимой, если B^{-1}.

Теорема 1 *Матрица $D = I - A$ неотрицательно обратима тогда и только тогда, когда соответствующая Леонтьевская система $x = Ax + c$ продуктивна (прибыльна).*

Доказательство. Систему уравнений модели Леонтьева можно представить в виде $Dx = c$. Если D неотрицательно обратима, то $x = D^{-1}c$ и, следовательно, модель продуктивна.

С другой стороны, если для любого $c \geq 0$ существует $x \geq 0$, удовлетворяющий системе уравнений модели Леонтьева, то согласно эквивалентности условий продуктивности (теорема **??**), матрица D имеет положительные главные миноры, в число которых входит и сам определитель $\det D$. Отсюда следует, чьл матрица D обратима и $x = D^{-1}c|geq0$ для $c \geq 0$. Полагая c последовательно равным координатным ортам $e^i, i = 1, 2, \ldots, n$ получаем набор соотношений

$$x^i = D^{-1}e^i, i = 1, 2, \ldots, n$$

или, упаковав все в матричное уравнение

$$0 \leq X = D^{-1}I,$$

что и требовалось доказать. ■

По сути дела эта теорема утверждает, что продуктивность модели Леонтьева эквивалентна положительной обратимости $I - A$.

Записывая модель Леоньтева в приращениях получаем соотношение $\Delta x = (I - A)^{-1}\Delta c$, где матричный коэффициент $(I-A)^{-1}$ играет роль "мультипликатора" — показывая на сколько нужно увеличить производство, для того, чтобы обеспечить заданный прирост потребления. В этом смысле это аналог мультипликатора Кейнса. [1]

1.1 Динамичская модель Леонтьева

В статической модели Леонтьева нет инвестиций в прямом смясле слова — конечное потребление навсегда выводится из экономики. Вместе с тем интересно и полезно рассмотреть случаи, когда часть продукта затрачивается на инвестиции и влияет на будущее состояние этономики. Чтобы описать это корректным и замкнутым образом необходимо аккуратно выписать все финансовые и материальные потоки.

Вспомним модель Леонтьева в финансовом выражении. Пусть $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n$ — (заданные) добавленные стоимости по отраслям (продуктам). Тогда цена из условия балансов денежных потоков должны удовлетворять уравнению

$$p = v(I - A)$$

[1] Дж. Кейнс рассматривал скалярную модель

$$Y = \alpha Y + I$$

где Y — национальный доход, I — инвестиции. Коэффициент α в его модели обозначал "склонность к потреблению". Решая это тривиальное уравнение относительно Y получаем

$$Y = \frac{1}{1 - alpha} I,$$

где $\beta = \frac{1}{1-alpha}$ — мультипликатор Кейнса. Аналогия очевидна.

и доход j-ой отрасли составляет $v_j x_j$. Вводя диагональную матрицу $V = diag(v)$ это соотношение может быть переписано векторно-матричным образом как $y = Vx$.

Пусть c_{ij} — "склонность" j-ой отрасли к потреблению продукции i-ой, т.е. часть дохода j-ой отрасли, расходуемой на приобретение продукции i-ой. Соответственно коэффициенты c_{ij} удовлетворяют условиям

$$c_{ij} \geq 0, \sum_{i=1}^{n} c_{ij} < 1,$$

а общий расход j-ой отрасти на приобретение продуктов i-ой отрасли будет $c_{ij}y_j$.

Предположения модели:

1. Отраслевой доход, заработанный в момент времени t, полностью тратится в момент времени $t+1$.

2. Существует программа внешних расходов $d(t)$ (каждый вектор $d(t)$ представляет собой внешний расход по отраслям в момент времени t).

Тогда, если обозначить через $y(t)$ доход по отраслям в момент времени t, по полный расход в момент времени $t+1$ составляет

$$Ct(t) + d(t+1) = z(t+1).$$

Если обозначить через R дагональную матрицу обратных цен

$$R = diag(1/p_1, 1/p_2, \ldots, 1/p_n) = P^{-1}, P = diag(p),$$

то в терминах продуктов вектор конечного спроса, индуцированный этим вектором затрат будет равен $w(t+1) = Rz(t+1)$ и, следовательно, в силу уравнений модели Ляпунова, должен обеспечиваться вектором валового выпуска

$$x(t+1) = (I-A)^{-1}w(t+1).$$

Соответственно доход на следующий момент времени будет составлять

$$y(t+1) = Vx(t+1) = V(I-A)^{-1}w(t+1) = V(I-A)^{-1}Rz(t+1) = V(I-A)^{-1}R(Cy(t)+d(t+1) = Yy(t)+a(t),$$

где

$$H = V(I-A)^{-1}RC \geq 0$$

и

$$a(t) = V(I-A)^{-1}Rd(t+1) \geq 0$$

если $d(t+1) \geq 0$. Отсюда в частности следует, что $y(t+1) \geq 0$.

С точки зреиия теоретической экономики особый интерес представляет случай где — некоторый фиксированный вектор. При этом выполняется соотношение

$$y(t+1) = Hy(t) + \rho^t a \tag{1}$$

разделив которое на ρ^t получим

$$\rho\frac{y(t+1)}{\rho^{t+1}} = H\frac{y(t)}{\rho^t} + a$$

или, вводя $\bar{y}(t) = y(t)/\rho^t$

$$\rho\bar{y}(t+1) = H\bar{y}(t) + a \tag{2}$$

Если $\rho I - H$ неотрицательно обратима, то существует $\bar{y} \geq 0$ такое, что

$$\rho\bar{y} = H\bar{y} + a, \bar{y} = (\rho I - H)^{-1}a, \tag{3}$$

т.е. пара функций $\rho^t a, \rho^t(\rho I - H)^{-1}a$ начиная с $t = 0$ удовлетворяют уравнению (1). Матрица $(\rho I - H)^{-1}$ называется матричным супермультипликатором.

На самом деле, однако, можно стартовать с произвольного $y(0)$ и при этом $y(t)/\rho^t \to \bar{y}$.

Действительно, вичитая (2) и (3) получим

$$\rho(\bar{y}(t+1) - \bar{y}) = H\bar{y}(t) - \bar{y}$$

или

$$\rho\delta\bar{y}(t+1) = H\delta\bar{y}(t)$$

где $(\rho i - h)^{-1} \geq 0$. Исходя из того, что

$$\frac{1}{\rho}(I - \frac{H}{\rho}) = \frac{1}{\rho}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{H^t}{\rho^t}$$

можно показать, что ряд $\sum_{t=0}^{\infty}\frac{H^t}{\rho^t}$ сходится и, следовательно, $\frac{H^t}{\rho^t} \to 0$. При этом $\delta\bar{y}(t) = \frac{H^t}{\rho^t}\bar{y}(0) \to 0$.

Теорема 2 *Если $H \geq 0$ и $(\rho I - H)^{-1} \geq 0$, то $\frac{H^t}{\rho^t} \to 0$ при $t \to \infty$.*

Доказательство.Если $(\rho I - H)^{-1} \geq 0$, то матрица $\rho I - H$ имеет неотрицательные главные последовательные миноры. В частности $\rho - h_{11} > 0$ или $\rho > h_{11} \geq 0$. Рассмотрим частную сумму

$$T_s = \frac{1}{\rho}\sum_{t=0}^{s}\frac{H^t}{\rho^t}$$

Тогда

$$T_s(\rho I - H) = I - \frac{H^{t+1}}{\rho^{t+1}} \leq I.$$

Умножая на $(\rho I - H)^{-1}$ получим

$$T_s \leq (\rho I - H)^{-1}$$

т.е. T_s ограничена сверху и монотонно возрастает. Отсюдо следует сходимость ряда $\sum_{t=0}^{\infty}\frac{H^t}{\rho^t}$ и, следовательно, $\frac{H^t}{\rho^t} \to 0$.

Интересный вопрос из себя представляет исследование вопроса при каких ρ матрица $\rho I - H$ положительно обратима. Оказывается, что существует такое $\lambda(H)$, что $\rho I - H$ положительно обратима для всех $\rho > \lambda(H)$. Это утверждение носит имя теоремы Фробениуса-Перрона.

В заключении мопоставим полученный результат со скалярной моделью Кейнса. Если $e = (1, 1, \ldots, 1)$ то $Y(t) = ey(t)$ — национальный доход. Соответственно

$$eH = eV(I - A)^{-1}RC = v(I - A)^{-1}RC = pRC = eC$$

откуда

$$Y(t+1) = eCy(t) + ed(t+1) = \bar{c}y(t) + I(t)$$

Если $\bar{c} = \alpha e$, то

$$Y(t+1) = \alpha Y(t) + I(t)$$

что соответствует модели Кейнса.