Экономико-математическое моделирование

Н.Е. Известный

Зурбаган, Мартобря 41
Без года

Содержание

1 Основы

1.1 Продукты и цены

Рассмотрим простой экономический универсум, состоящий из определенного (n) количества продуктов (товаров).

Обозначим через $E = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ пространство векторов продуктов x, а через $E^\star = \{p = (p_1, p_2, \dots, p_n)\}$ — пространство цен, т.е. пространство обменных коэффициентов для этих товаров. Если цена i-го товара равна p_i, а цена j-го — p_j, то за 1 единицу i-го товара может быть получено p_i/p_j единиц j-го. Поскольку для этих обменных отношений важно лишь отношение цен, по они определены с точностью до постоянного положительного множителя, который удобно определить так, чтобы цена некоторого товара была равна 1. Такой товар играет роль денег. В теории часто используется и другой способ нормировки цен, при котором сумма цен равна единице.

При условии безграничной делимости товаров можно считать, что к количествам продуктов и их ценам применимы стандартные операции линейных пространств сложения векторов и их умножения на вещественные числа:

- Для $x \in E, y \in E$ сумма $x + y$ понимается как
$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in E;$$
- Для $x \in E, \lambda \geq 0$ произведение λx понимается как
$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in E.$$

аналогично для $E^\star$, что превращает их в линейные пространства. [1]

Если $p \in E^\star$ и $x \in E$, то можно определить материальное богатство, которым владеет экономический агент, как сумму:
$$px = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$
Определенное таким образом богатство является линейным функционалом над пространством продуктов.

С другой стороны, если $w(x)$ — богатство обладателя вектора продуктов x является линейным функционалом, то есть выполняются условия

- $w(x + y) = w(x) + w(y)$,

[1] вообще говоря, эти операции применимы только на неотрицательных векторах, так что пространство продуктов и цен не совсем линейно. Интересно, как в этих случаях теорема Радона-Никодима ? Хотя, для случая задолженности можно считать кол-во товара отрицательным …

- $w(\lambda x) = (\lambda w(x))$.

то применима

Теорема (Родона-Никодима) 1 *Существует такое p, что*

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Согласно принципу линейности хозяин двух коров богаче хозяина одной коровы ровно в два раза.

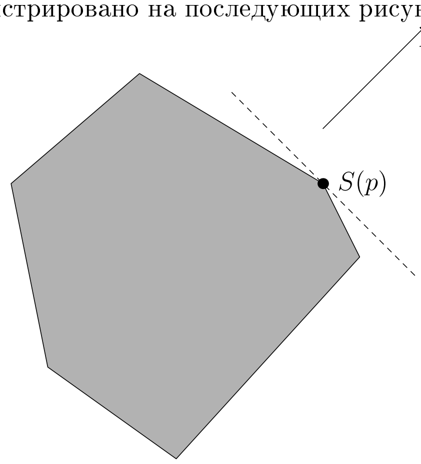
1.2 Производство и потребление

Продукты появляются в экономическом универсуме не сами по себе, а в результате деятельности некоторых экономических агентов, которых мы будем называть *производителями*. В своей деятельности они ориентируются на рыночную ситуацию и очень агрегируя можно считать, что существует функция $S(p)$ определяющая объем поставок на рынок товаров если цены на рынке равны p. Обычно $S(p)$ в более детализованных моделях – это множество $x \in X \subset E$, обеспечивающее максимальную прибыль производителя в условиях заданных цен:

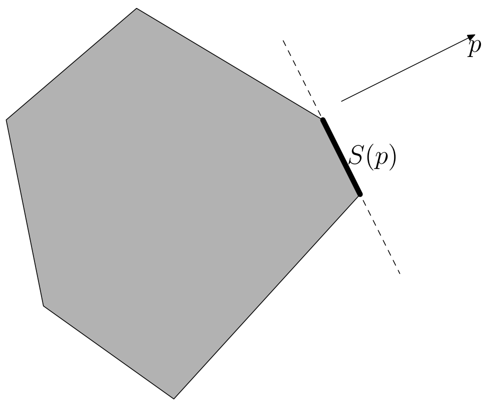
$$S(p) = \{x : px = \max_{z \in X} pz\} \cap X,$$

где X — технологические и прочие ограничения на возможности производителя по выпуску товаров.

Будучи таким неаналитическим объектом, $S(p)$ даже в простейшей ситуации, когда X не зависит от p, может быть неоднозначным и терять, соответственно, непрерывность, что и продемонстрировано на последующих рисунках.



$S(p)$ однозначно.



$S(p)$ многозначно.

В подобной ситуации цены на правом и левом рисунках могут быть сколь угодно близки, а соответствующие множества $S(\cdot)$ существенно отличаться.

Для описания особенностей поведения объектов, подобных $S(p)$ было введено понятие точечно-множественного отображения $F : X \to 2^H$, сопоставляющего каждой точке $x \in X \subset E$ подмножество другого пространства H. [2] В нашем случае каждой точке неотрицательного октанта $E^\star_+$ пространства цен $E^\star$ сопоставляется множество оптимальных планов производства $S(p) \subset E_+$ — неотрицательного октанта векторов пространства продуктов, так что вполне можно записать

$$S : E^\star_+ \to 2^{E_+},$$

если кому-то это покажется понятней.

Для более детального описания $S(\cdot)$ и ему подобных точечно-множественных отображений, порождаемых экстремальными задачами, подходящими оказались понятия полунепрерывности (сверху и снизу). Для простоты мы рассмотрим случай отображения, действующего из E в 2^E.

[2] 2^Y — это еще один из примеров обозначений сумасшедших математиков и представляет собой множество всех подмножеств Y.

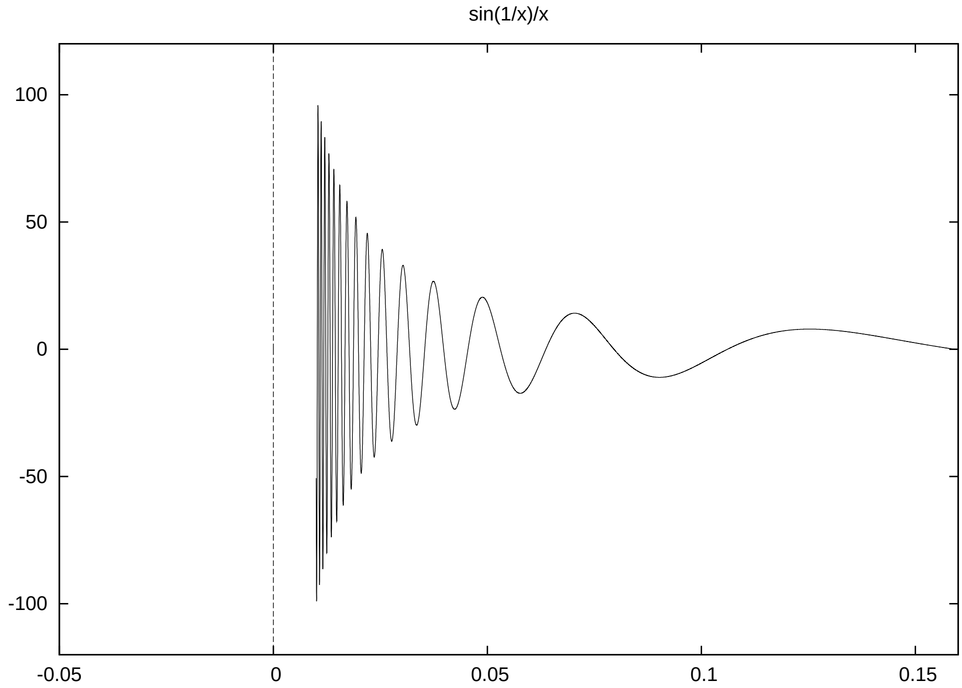


Рис. 1: Полунепрерывное сверху неограниченное точечно-множественное отображение

Определение 1 *Отображение $F : E \to 2^E$ называется полунепрерывным сверху, если для любой точки x и произвольной окрестности нуля U существует другая окрестность нуля V такая, что $F(y) \subset F(x) + U$ при $y \in x + V$.*

В качестве примера нетривиально полунепрерывного сверху точечно-множественного отображения рассмотрим

$$F(x) = \begin{cases} \sin(1/x)/x & \text{при } x > 0 \\ (-\infty, \infty) & \text{при } x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

график которого изображен на рис. 1.2. Заметим, что для этого отображения ни в каких смыслах не существует предела $\lim_{x \to +0} F(x)$, что может представлять собой серьезную проблему для получения каких-либо конструктивных результатов.

В связи с этим для практических приложений более плодотворным оказалось следующее определение, позволяющее избегнуть подобных патологий:

Определение 2 *Отображение $F : E \to 2^E$ называется замкнутым, если из $x^n \to x$ и $y^n \to y, y^n \in F(x^n)$ при $n \to \infty$ следует, что $y \in F(x)$.*

В качестве примера нетривиально замнутого точечно-множественного отображения, построенного по аналогии с (1) рассмотрим

$$F(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{при } x > 0 \\ [-1, 1] & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

график которого изображен на рис. 1.2. Замкнутые отображения являются полунепрерывными сверху, однако обратное гарантированно имеет место лишь при условии равномерной локальной ограниченности, т.е. когда для некоторой окрестности нуля U существует число $\rho > 0$ такое, что $F(y) \subset \rho B$ для всех $y \in x + U$. Здесь B обозначает единичный шар $\{x : \|x\| \leq 1\}$ пространства E.

При достаточно слабых предположениях $S(p)$ является замкнутым отображением.

Теорема 1 *Пусть S равномерно ограничено в некоторой окрестности p. Тогда S замкнуто в p.*

Доказательство.Пусть $p^n \to p$ при $n \to \infty$ и $x^n \in S(p^n)$, т.е. $p^n x^n \leq p^n x$ для всех $x \in X$. В силу равномерной ограниченности у последовательности x^n существует по крайней мере одна предельная точка $\bar{x}$ и соответствующая подпоследовательность такая, что . Тогда

$$p\bar{x} = \lim_{k \to \infty} p^{n_k} x^{n_k} \leq \lim_{k \to \infty} p^{n_k} x = px$$

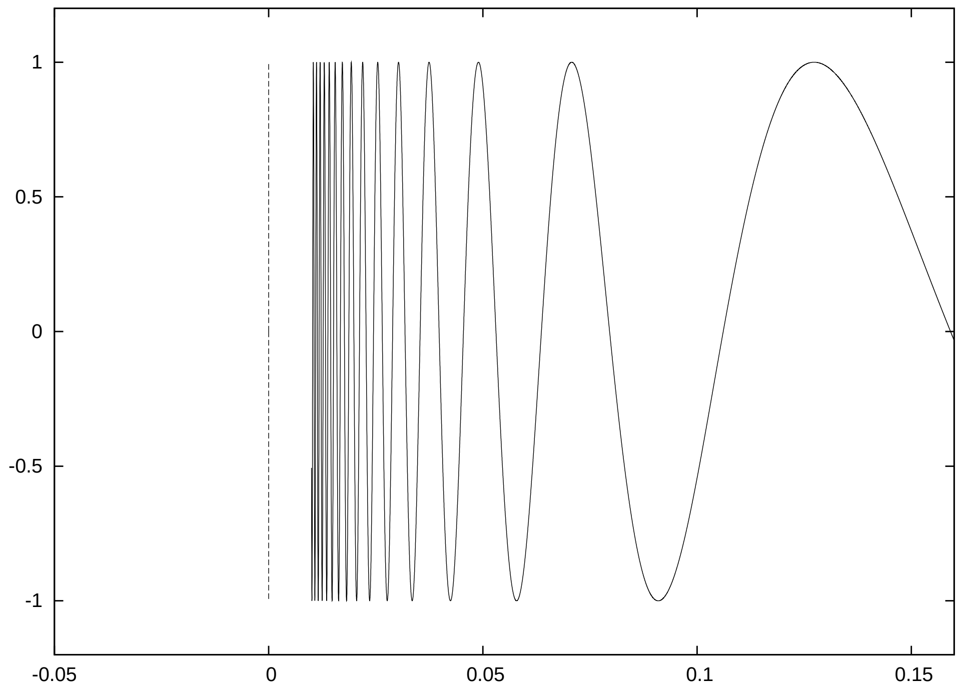


Рис. 2: Замкнутое точечно-множественное отображение

для любого $x \in X$. Следовательно, $\bar{x} \in F(p)$. ■

Рассмотрим теперь экономическую ситуацию с позиции *потребителя.* Его экономическая функция заключается в том, чтобы генерировать платежеспособный спрос на товары, который мы будем обозначать через $D(p) \subset E$. Популярная и тем не менее ожесточенно критикуемая модель поведения потребителей заключается в представлении $D(p)$ как решения потребителем оптимизационной задачи

$$D(p) = \{x : u(x) = \max_{z \in X_p} u(z)\},$$

где $u(\cdot)$ — так называемая функция полезности. Множество допустимых (платежеспособных) выборов потребителя X_p в простейшем случае представляет собой бюджетное ограничение вида

$$X_p = \{z : pz = b\},$$

где предполагается, что у потребителя изначально есть определенная сумма денег b. Даже в этом случае $D(p)$ может, как и $S(p)$ вести себя весьма "неудобным" для аналитического исследования образом. Ситуация еще более усложняется, если правая часть бюджетного ограничения сама зависит от цен p. Такая ситуация возникает, например, когда капитал потребителя возникает в результате перераспределения доходов производителя (рента, дивиденты, заработная плата, ...) и, соответственно, зависит от цен на рынке.

1.3 Оптимумы и равновесия

Рассматриваемые отдельно, задачи производителя и потребителя представляют собой достаточно хорошо исследованные математические объекты. Существует богатая теория экстремальных задач, обширный алгоритмический арасенал математического программирования, эффективные программные системы. Для последующих рассуждений нам потребуется некоторая характеризация оптимальных решений, будь то решения потребителя или производителя.

С самых общих позиций они представляют собой решения задач вида

$$\begin{aligned} \min \Phi(x) \quad &= \Phi(x^\star) \\ x \in X, & \end{aligned} \tag{2}$$

при соответствующей трактовке целевой функции Φ и допустимого множеста X. В этом случае цены являются фиксированными и не участвуют в формулировке задачи (2).

Рассмотрим некоторую весьма общую характеризацию решений задачи (2), которая приводит к большому классу задач, описывающих, в том числе, и различные экономико-математические модели. [3] Если функция Φ — выпукла и $\partial\Phi(x)$ — ее субдифференциал в точке x, то для произвольного $x \in X$ и $x_\lambda = x^\star + \lambda(x - x^\star), \lambda \in (0, 1]$ выполнено

$$0 \le \Phi(x_\lambda) - \Phi(x^\star) \le g_\lambda(x_\lambda - x^\star) \tag{3}$$

для произвольного субградиента $g_\lambda \in \partial\Phi(x_\lambda)$. Отсюда

$$g_\lambda(x - x^\star) \ge 0$$

для любого субградиента $g_\lambda \in \partial\Phi(x_\lambda)$ и произвольного $x \in X$. При $\lambda \to +0$ можно считать $g_\lambda \to \bar{g}$ и в силу полунепрерывности сверху $\partial\Phi(\cdot)$ предел $\bar{g} \in \partial\Phi(x^\star)$. Поэтому $x^\star$ удовлетворяет следующим условиям: $x^\star \in X$ и существует $\bar{g} \in \partial\Phi(x^\star)$ такое, что

$$\bar{g}(x - x^\star) \ge 0 \tag{4}$$

для всех $x \in X$. Если $\Phi(\cdot)$ — дифференцируемая функция, то $\bar{g} = \Phi'(x^\star)$ и для всех $x \in X$

$$F(x^\star)(x - x^\star) \ge 0, \tag{5}$$

где $F(x^\star) = \Phi'(x^\star)$.

Задачи (4, 5) положили начало очень плодотворному математическому направлению — теории вариационных неравенств.

Определение 3 *Пусть $X \subset E$ и $F : X \to 2^{E^\star}$. Поиск $x^\star$ такого, что для некоторого $g^\star \in F(x^\star)$*

$$g^\star(x^\star - x) \ge 0 \tag{6}$$

для всех $x \in X$ называется задачей решения вариационного неравенства (6).

Связь задачи поиска экономического равновесия с решением вариационных неравенств легче всего продемонстрировать на примере *вальрасовских* экономик, т.е. таких экономик, в которых выполняется закон Вальраса в узком смысле:

$$pD(p) - pS(p) = 0 \tag{7}$$

для всех $p \ge 0$. С экономической точки зрения этот закон выполняется в замкнутых экономиках, где нет притока или оттока средств и единственным источником спроса является перераспределенный доход производителей. Ключевым же вопросом в обьединенной математической модели производства и потребления является следующий:

> *Существует ли такая цена $p^\star$, которая позволяет, хотя бы в принципе, сбалансировать спроса и производство ?*

Эта задача называется задачей поиска экономического равновесия.

Поскольку речь идет о многозначных отображениях, то формально речь идет о существовании такой цены $p^\star$, что

$$0 \in S(p^\star) - D(p^\star)$$

или, иными словами, о существовании такой цены $p^\star$, для которой найдется вариант производства и потребления $x^\star$, который будет оптимален как для производителя ($x^\star \in S(p^\star)$), так и для потребителя ($x^\star \in D(p^\star)$). Заметим, однако, что это ничего им особенно не гарантирует — цены могут оказаться такими, что результирующий объем производства и потребления особенно радовать не будет.

Тогда, если $p^\star$ — равновесная цена, т.е. выполнены условия

$$D(p^\star) - S(p^\star) = E(p^\star) \le 0, p^\star \ge 0 \tag{8}$$

и имеет место закон Вальраса (7), то

$$E(p^\star)(p^\star - p) = -E(p^\star)p \ge 0$$

[3] В дальнейшем существенно будет использоваться аппарат выпуклого анализа и крайне желательно поработать с соответствующей литературой. Достаточно адекватной учебной монографией по предмету является [4].

для любого $p \geq 0$, т.е. выполнено вариационное неравенство (6) с $X = E^{\star}_{+}, F(x) = D(x) - S(x) = E(x)$ — функции избыточного спроса.

Обратно, если $p^{\star} \geq 0$ и

$$E(p^{\star})(p^{\star} - p) \geq 0$$

для всех $p \geq 0$, то, полагая $p = 0$ и $p = 2p^{\star}$ получаем $p^{\star}E(p^{\star}) = 0$. Отсюда следует, что $pE(p^{\star}) \leq 0$ для всех $p \geq 0$, что эквивалентно $E(p^{\star}) \leq 0$ и, следовательно, $p^{\star}$ — равновесная цена.

Другой родственный математический аппарат, часто применяемый в экономических моделях — это задачи линейной и нелинейной комплементарности.

В задаче линейной комплементарности требуется найти пару неотрицательных переменных $x \in E$ и $w \in E^{\star}$, таких, что

$$w = Mx + q$$

и выполнено условие комплементарности $wx = 0$.

Эту же задачу, полагая $F(x) = Mx + q$, можно переписать в виде:

$$x \geq 0, F(x) \geq 0, xF(x) = 0 \tag{9}$$

и обобщить до задачи нелинейной комплементарности, предполагая $F(x)$ нелинейным отображением.

Можно показать, что при $X = E_{+}$ вариационное неравенство (6) эквивалентно задаче комплементарности (9). Действительно, если $F(x^{\star}) \geq 0), x^{\star} \geq 0$ и $F(x^{\star})x^{\star} = 0$, то для произвольного $y \geq 0$

$$F(x^{\star})(y - x^{\star}) \geq 0$$

и, следовательно, $x^{\star}$ - решение вариационного неравенства (6). Обратное было фактически показано при демонстрации того, что равновесие Вальраса, которое является по сути дела условием комплементарности, может быть получено из решения соответствующего вариационного неравенства.

1.4 Вопросы для самопроверки

1. Описать $D(p)$ для производителя 3-х продуктов x_1, x_2, x_3 с технологическим множеством, описываемым системой неравенств

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & \leq & 50 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq & 80 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 120 \end{array}$$

   при наборе цен на продукты $p = (10, 15, 25)$.

2. Постройте пример полунепрерывного, но незамкнутого точечно-множественного отображения.

3. Является ли отображение $D(p)$ замкнутым ?

4. Известно следующее определение полунепрерывности снизу функций: функция f полунепрерывна снизу в точке x тогда и только тогда, когда из сходимости $y \to x, f(y) \to \bar{f}$ следует $\bar{f} \geq f(x)$. Определим точечно-множественное отображение $T_f(x) = \{\mu : \mu \geq f(x)\}$. Показать, что f полунепрерывно снизу в x тогда и только тогда, когда T_f замкнуто в x.

Список литературы

[1] Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика М.: Мир, 1972, 517 с.

[2] Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения: Пер. с франц.- М.: Мир, 1988.- 264 с.

[3] Тодд М. Дж. Вычисление неподвижных точек и приложения в экономике.- М.: Наука, 1983.- 183 с.

[4] Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. Изд.2.- М.: Едиториал, 2003.- 176 с.