Лекция 3. Жизненно важная роль деревьев

Н.Е. Известный

Текущая версия — 11 марта 2015 г.*

Введение

Начнем с простейшей модели одной из проблем ISP. В городе В., впрочем, как почти везде, кабельная система принадлежит некой акуле капитализма, которая собирает с пользователей этой системы весьма внушительную дань. Поэтому независимый ISP для получения конкурентных преимуществ хотел бы минимизировать оплату аренды за каналы, с помощью которых он соединяется со своими клиентами.

Конечно, математики тут же прибежали на помощь и немедленно предложили неформальную формальную постановку задачи:

> пусть V множество клиентов ISP и E — множество каналов, принадлежащих ЗАО АКУЛА, соединяющих тем или иным образом V так, что $G = (V, E)$ представляет собой *связный* граф. Думается, что всем понятно, что это такое, а если нет, то загляните в Мусорный ящик. Пусть $c(e) > 0, e \in E$ — стоимость аренды ребра e и расходы на аренду каналов просто складываются. Тогда требуемтся найти связный подграф $G' = (V, E')$ с $E' \subset E$ такой, что суммарные расходы $S(E') = \sum_{e\in E'} c(e)$ были бы минимальны.

Поскольку такой граф не будет содержать циклов (почти очевидно), то, учитывая требуемую связность, G' будет *деревом.*

В жизни графов, так же, как и в жизни обычных людей, деревья играют большую роль. Поэтому полезно знать их (деревьев) некоторые отличительные особенности.

Теорема 1 *Если $G = (V, E)$ — дерево, то $|E| = |V| - 1$ и наоборот.*

Доказательство.Возьмем некоторое $v^0 \in V$ м рассмотрим ребра $e = (v^0, \star)$. Их непустое множество, иначе граф несвязный. Возьмем какое-либо из них $e^1 = (v^0, v^1)$ и рассмотрим E^1 — все, соединяется с v^1. Ясно, что там нет (v^2, v^0) иначе был бы цикл. И так далее. Каждый раз мы убавляем вершину и ребро и они должны исчерпаться одновременно. ■

Следущим полезным свойством является то, что в дереве любые две вершины соединены единственным путем.

Теорема 2 *Если $G = (V, E)$ — дерево, то для любой пары вершин (v, v') существует единственный путь.*

Доказательство.Если путей по крайней мере 2, то можно построить цикл. ■

Ввиду вышеизложенного задача оптимальной аренды сводится к построению такого дерева $T = (V, E_T)$ с $E_T \subset E$, что $\sum_{e\in E_T} c(e)$ принимает минимальное значение. Такое дерево называется

*Очередная порция цианида калия применена 19.02.2015 минимальным остовным деревом, но так его никто не называет. Все используют абревиатуру MST — Minimal Spanning Tree.

Условия оптимальности в этой задаче определяются следующей теоремой, для которой в Мусорном баке можно посмотреть определение *объезда.*

Теорема 3 *Если T оптимально, то для любого $e \in E \setminus E_T$ все ребра в объезде $D(e)$ имеют стоимости не более $c(e)$.*

Доказательство.Заметим, что $D(e)$ в T определяется однозначно. Если теорема неверна, то $\{e, D(e)\}$ — цикл, в котором можно удалить e' с $c(e') > c(e)$ и получить в результате дерево [1] меньшей стоимости. ■

Для поиска MST можно применить жадный алгоритм, предложенный Kruskal.

Data: Граф $G = (V, E)$, стоимости ребер $c : E \to \mathbb{R}$.
Result: Минммальное покрывающее дерево T
Инициализация;
сортируем ребра по возрастанию $c(e)$:

$$c(e_1) \leq c(e_2) \leq \cdots \leq c(e_{|E|}).$$

инициализируем $T_0 = (V, \emptyset)$ и счетчик итераций $k = 0$;
while $k \leq |E|$ **do**
  Проверяем, содержит ли $E_k \cup e_k$ цикл. Если нет, то пополняет дерево

$$T_{k+1} = (V, E_k \cup e_k) = (V, E_{k+1}).$$

  Увеличиваем счетчик итераций $k \longrightarrow k + 1$;
end
Завершаем работу: ;

Algorithm 1: Алгоритм Крускала

1 Мусорный ящик

Определение 1 *Граф $G = (V, E)$ — связный, если ...*

Определение 2 *Связный граф $G = (V, E)$ без циклов называется деревом.*

Определение 3 *Пусть e некоторое ребро. Объездом $D(e)$ называется маршрут $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ такой, что $\{e, D(e)\}$ представляет собой цикл.*

[1] Полученный при удалении граф будет являться деревом, поскольку количество ребер при этом не изменилось.