Лекция 2

Н.Е. Известный

Текущая версия — 18 февраля 2015 г.*

Введение

Со времен предыдущей лекции пара узелков осталались незавязанными ...

> Известная с незапямятных времен задача решения системы линейных уравнений $Ax = b$ остается весьма востребованной, особенно в области больших размерностей. На языке теории графов особенности этой системы можно отчасти описать с помощью графа структурных зависимостей между отдельными уравнениями этой системы. Выделив наибольшее максимальное независимое множество этого графа, можно с линейной вычислительной сложностью избавиться от определенной части переменных.
>
> Независимые множества также связаны с *кликами*. Независимое множество дополнительного графа дает клику исходного.

Поэтому мы начнем с конца.

1 Независимые множества и клики

Как обычно граф $G = (V, E)$. Дополнительный граф — это $G^{\ominus} = (V, V \times V \setminus E$, где операция "вычитания" множеств $\setminus$ определяется как $A \setminus B = A \cap B^c$ с B^c — дополнение B: $B^c = \{b : \neg(b \in B)\}$. Не очень конструктивное определение, но не будем в это углубляться. В контексте нашего предмета операция дополнения A^c множества $A \subset V$ будет определяться как такое множество, что $A^c \cup A = V, A^c \cap A = \emptyset$. Аналогично будут определятся и дополнения F^c множеств ребер $F \subset E$, хотя тут возможны варианты: $F^c \cup F = E$ и $F^c \cup F = V \times V$ ...

Независимое множество (вершин) W выделяется тем, что $W \times W \cap E = \emptyset$. Антиподом независимого множества являются полносвязные подграфы. ется *клика*.

Определение 1 *Множество $W \subset V$ образует полносвязный подграф G, если $E_W = E \cap (W \times W) = W \times W$.*

Среди полносвязных подграфов особый интерес для полиции представляют подграфы максимального размера, которые даже заслужили отдельного термина *клика* [1].

Определение 2 *Множество $W \subset V$ образует клику, если генерируемый им подграф $G_W = (W, E_W)$ полносвязный и не существует другого полносвязного $G_U = (U, E_U)$ такого, что $W \subset U$.*

Обозначим для простоты $V \times V = V^2$ и соответственно $W \times W = W^2$. Тогда Если W — клика в G, то в дополнительном графе $G^{\ominus} = (V, V^2 \setminus E) = (V, E')$ подграф $G^{\ominus}_W$ имеет простой вид:

$$\begin{aligned} G^{\ominus}_W = (W, E'_W) = (W, W^2 \cap E') = (W, W^2 \cap (V^2 \setminus E)) = \\ (W, W^2 \cap V^2 \cap E^c) = (W, W^2 \cap E^c) = (W, \emptyset), \end{aligned} \tag{1}$$

т.е. в $G^{\ominus}$ множество W является независимым. Соответственно, если в G множество W независимо, то в $G^{\ominus}$ оно является кликой. Следовательно, любой алгоритм, предназначеный для нахождения клик, в том числе и максимальных, может быть использован для нахождения независимых множеств. Это создает опасную иллюзию, что надо заниматься только кликами, что неверно.

*Выжившие мышки подвергнуты 12.02.2015

[1] Клика (фр. clique — шайка, банда) — компания или сообщество людей, стремящихся любыми средствами достигнуть каких-либо низменных, корыстных целей, см. `ru.wikipedia.org/wiki/`,"клика"

Но тем не менее задача нахождения клик весьма интересна и для ее решения предлагались различные алгоритмы, классическим из которых является метод Брона-Кербоша (Bron-Kerbosch) [1]. Так как задача нахождения максимальной клики по всей видимости экспоненциально сложна, то даже весьма уважаемый БК-метод является более или менее хорошо замаскированным перебором всех возможных вариантов. Вместе с тем он вносит в этот процесс определенную логику, что делает его на практике достаточно эффективным.

Независимые множества имеют также весьма близкие отношения к другим полезным подмножествам V, которые называются *вершинными покрытиями* или просто *покрытиями*.

Определение 3 *Множество $U \subset V$ называется покрытием, если $E \subset V \times U$.*

Другими словами это означает, что все ребра из E имеют по крайней мере одну из вершин в U или то, что все вершины графа находятся на растоянии не более чем одного сетевого перехода от U. Полезное свойство для пожарных или скорой помощи ...

Справедливо сведующее утверждение.

Теорема 1 *Если W — независимое подмножество V, то $W^c = V \setminus W$ является покрытием G.*

Доказательство.Пусть W — независимое множество. Тогда

$$E = (W^c \times W^c) \cup (W \times W^c) = (W^c \cup W) \times W^c = V \times W^c,$$

что все и доказывает. ■

2 Мусорный ящик

Определение 4 *Множество $W \subset V$ образует полносвязный подграф G, если $E_W = E \cap (W \times W) = W \times W$.*

Определение 5 *Множество $W \subset V$ образует клику, если генерируемый им подграф $G_W = (W, E_W)$ полносвязный и не существует другого полносвязного $G_U = (U, E_U)$ такого, что $W \subset U$.*

Определение 6 *Множество $U \subset V$ называется покрытием, если $E \subset V \times U$.*

3 Заточка мозгов

1. В предложенных обозначениях $G^{\ominus}$ можно также понимать и как "операцию" $\ominus$ примененную к G. В свою очередь к $G^{\ominus}$ можно повторно применить $\ominus$ и получить $(G^{\ominus})^{\ominus}$ и т.д. Показать, что $(G^{\ominus})^{\ominus} = G$, т.е. что граф, дополнительный к дополнительному сопадает с исходным.

Список литературы

[1] Bron C., Kerbosch J. Finding all cliques of an undirected graph Communications of the ACM, vol. 6, No. 9, 575–577.