Лекция 1

Н.Е. Известный

Текущая версия — 11 марта 2015 г.*

Введение

Все знают, что такое графы [1]. Поэтому продолжим как ни в чем не бывало, вводя необходимые понятия по ходу пьесы и складывая их в *Мусорный ящик*.

1 Независимые множества

Рассмотрим задачу:

> В распоряжении у бригадира артели "Эй, ухнем" есть определенный набор специалистов: слесарь, токарь, пекарь, профессор математики, водитель автомашины и т.д. и т.п. На данный рабочий день поступили следующие заказы–задания: выкопать, закопать, починить, поломать и т.д. и т.п. Для выполнения каждого задания необходим свой набор специалистов и каждое задание требует полного рабочего дня выделенных для ее выполнения специалистов.
>
> Требуется: определить максимально возможный набор заданий, который может выполнить артель за день.

За дело взялись математики и исказили ситуацию до неузнаваемости:

Пусть $V = \{1, 2, \ldots, M\}$ — множество заданий, каким-то образом пронумерованных. Задания v_1 и v_2 будем считать связанными, если для их исполнения требуется хотя бы один общий специалист.

Факт связи между заданиями v_1 и v_2 будем записывать на бумажке в виде пары (v_1, v_2) и саму бумажку обозначим как e.

Все связи между работами представим в виде множества пар $\{(v_i, v_j), v_i \in V, v_j \in V\} \subset V \times V$. Перенумеровав все пары каким-либо образом и вводя для каждой пары компактное обозначение e_k, где k ее номер, получим исчерпывающее описание ситуации в виде пары множеств: V — вершины, E — связи, причем $E \subset V \times V$. Осталось ввести для этой пары свое обозначение: $G = (V, E)$ и мы получим граф !

Граф описывает лишь исходные данные задачи, но никакой задачи сам по себе не ставит. Возвращаясь снова к содержательному описанию задачи, мы быстро понимаем, что в ней требуется найти максимальное по мощности (т.е. по количеству элементов) подмножество $W \subset V$ такое, что между элементами этого множество не существует связывающих ребер. На формальном воляпуке, которым пользуются сумасшедшие математики, это может быть записано как условие $E \cap (W \times W) = \emptyset$. Такое множество W называют независимым и его максимальная мощность $|W|$ называется "числом независимости", "вершинным числом независимости" или "числом внутренней устойчивости". Так что у вас есть выбор.

Кстати, вопрос о существовании независимых множества решеается тривиально: произвольная вершина графа является независимым множством, поскольку мы предполагаем, что наши графы не содержат петель (поройтесь в *Мусорном ящике* в поисках подробностей, что это, собственно говоря, значит).

Поскольку для любого независимого W его мощность не превосходит $|V|$ и количество независимых множеств не превосходит $|2^V| = 2^{|V|}$ то и вопрос о существовании наибольшего независимого множества, на котором достигается $\max |W|,\ W$ — независимо, решается тривиально.

---

*Первый раз опробована на мышах 05.02.2015

[1] Граф (нем. Graf) — королевское должностное лицо в раннем Средневековье в Западной Европе. Но нам нужен graph !

Однако задача *нахождения* наибольшего независимого множемтва нетривиальна и до сих пор нет алгоритмов, имеющих полиномиальных характер сложности.

Приведенный пример использования теории графов и независимых множеств носит иллюстративный характер. Более реалистичный пример относится к области вычислительной математики. Известная с незапамятных времен задача решения системы линейных уравнений $Ax = b$ остается весьма востребованной, особенно в области больших размерностей. На языке теории графов особенности этой системы можно отчасти описать с помощью графа структурных зависимостей между отдельными уравнениями этой системы. Выделив наибольшее максимальное независимое множество этого графа, можно с линейной вычислительной сложностью избавиться от определенной части переменных.

Независимые множества также связаны с *кликами*. Независимое множество дополнительного графа дает клику исходного.

Графы Муна-Мозера.

2 Мусорный ящик

Определение 1 *Граф — это:* $G = (V, E),\ E \subset V \times V$.

Для упрощения мы будем считать, что диагональ $D = \{(v, v),\ v \in V\}$ не пересекается с E : $D \cap E = \emptyset$. Другими словами наши графы не содержат *петель.*

Определение 2 *Подграф* $G_W = (W, E_W)$ *графа* $G = (V, E)$ *определяется как* $W \subset V,\ E_W = E \cap (W \times W)$.

Определение 3 *Подмножество* $W \subset V$ *независимо, если* $E_W = E \cap (W \times W) = \emptyset$.