

Е.А. Нурминский^{1,2}, Н.Б. Шамрай^{1,2}

¹ Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН

² Дальневосточный федеральный университет

Прогнозное моделирование автомобильного трафика Владивостока

В ходе реализации масштабных федеральных программ развития Дальнего Востока России значительные средства вкладываются в инфраструктурные проекты совершенствования транспортных сетей г. Владивостока и его непосредственного окружения. В настоящей работе на основе генерального плана развития города разработаны прогнозные модели изменений транспортной ситуации и перераспределения транспортных потоков в результате реализации этих проектов. Описаны результаты вычислительных экспериментов по расчету транспортных потоков в существующей и создаваемой сетях с использованием теории экономического равновесия и модели стационарной динамики.

Ключевые слова: конкурентное равновесие, моделирование транспортных потоков, вариационные неравенства, матрица корреспонденций, проективные методы.

I. Введение

Моделирование городского автомобильного трафика имеет значительную историю и включает в себя громадный объем фактического материала, накопленного за десятилетия процессов активной автомобилизации. С 50-х годов прошлого столетия в этой области начали применяться модели, включающие различные принципы оптимальности и соответствующие численные методы. Знаковым событием было появление работы М. Beckmann, С.В. McGuire и С.В. Winsten, сначала как технического отчета корпорации RAND, а затем и монографии [1], ставшей в некотором смысле классикой моделирования автомобильного трафика. В отличие от многочисленных моделей, описывающих детали поведения потока автомобилей с той или иной степенью подробности, М. Beckmann, С.В. McGuire и С.В. Winsten взглянули на проблему с экономической точки зрения, когда в общем-то пренебрегают деталями технологического процесса, а именно, каким образом двигался поток автомобилей, а интересуются лишь конечным результатом — каковы были затраты при перемещении из начального пункта в конечный и как водитель в качестве рационального экономического агента должен вести себя в этой ситуации. Предполагая полную информированность водителя, его неспособность вступать в коалицию с другими пользователями сети и то, что влияние отдельного водителя на общий трафик пренебрежимо мало, авторы впервые математически выписали условия равновесия и показали их эквивалентность при определенных допущениях условиям оптимальности в некоторой вспомогательной искусственно построенной экстремальной задаче.

Альтернативным характером эгоистического поведения водителей является идеальная кооперация, направленная на получение максимально большого системного эффекта, например, ми-

нимизации суммарных транспортных издержек. В общем случае это приводит к совершенно иному распределению транспортных потоков по сети, и разность между бескоалиционными и кооперативными издержками можно трактовать как «цену анархии».

С тех пор в прогнозировании транспортных потоков сформировались две парадигмы моделирования, часто цитируемые как поведенческие принципы Вардропа [2]:

- 1) пользователи сети независимо друг от друга выбирают маршруты следования, соответствующие их минимальным транспортным расходам;
- 2) пользователи сети выбирают маршруты следования, исходя из минимизации общих транспортных расходов в сети.

Первый подход получил также название пользовательско-оптимального (user optimization, UO), второй — системно-оптимального (system optimization, SO).

Реально, по-видимому, реализуется некоторый промежуточный принцип поведения. Водителей автомобилей вынуждают при движении учитывать не только их собственные, но и системные интересы: на определенных участках транспортной сети вводят специальные режимы, перекрестки регулируются светофорами или работниками ГАИ и т.п. Это уменьшает «цену анархии», но оставляет в силе принципиальное различие между этими двумя подходами.

С тех пор UO-модели транспортных потоков развивались в различных направлениях, и состояние дел можно себе представить по обзору [3]. В той или иной степени эта методология, как правило, используется в процессах городского планирования (к сожалению, не в России) и реализована в различных программно-аппаратных

комплексах автоматизации транспортного проектирования (PTVision, AIMSUN, CONTRAM, TRANSIMS, TRANSNET и др.)

В данной работе изложены результаты проведенных исследований для прогнозирования автомобильного трафика на дорогах Владивостока. Описывается опыт моделирования транспортных потоков с позиции УО-методологии на основе двух подходов: монотонного вариационного неравенства и модели стационарной динамики [4]. Проводится сравнение полученных результатов с данными натурных обследований. Как показали численные расчеты, решение вариационного неравенства получилось весьма близким к эмпирическим данным. Модель стационарной динамики хоть и имеет ряд замечательных теоретических свойств, однако основана на некоторых экстремистских принципах, и ее применимость к реальным сетям вызывает некоторые вопросы. При помощи вариационного неравенства моделируется автомобильный трафик в модернизированной транспортной сети. Численные расчеты показали, что запланированные в генеральном плане развития Владивостока работы по строительству новых дорог улучшат транспортную ситуацию в городе.

II. Общая транспортная ситуация во Владивостоке

В данной работе улично-дорожная сеть (УДС) Владивостока представлена ориентированным графом, географическая привязка которого осуществлялась на основе данных, предоставленных геодезическим предприятием ФГУП «ПримАГП». Некоторые характеристики этого графа, отражающие топологию сети, приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Характеристики УДС г. Владивостока

Степени вершин					Всего	Дуг
1	2	3	4	5		
1274	241	2521	245	9	4290	5172

Метрические характеристики УДС можно определить общей протяженностью дорог в пределах территории города, которая составляет 1143,37 км, и средним расстоянием между перекрестками, которое равно 412 м.

Интересной особенностью УДС является большое (2521) количество вершин степени 3, что характерно для естественных графовых структур (трещин на поверхности земли, речных сетей, кровеносных сосудов и пр.), и говорит о том, что в большей степени топология УДС города складывалась стихийно. Любопытно также, что это число практически совпадает с числом вершин бинарного дерева, имеющего такое же как в УДС количество терминальных вершин (1274). План основной части УДС с соблюдением пространственных пропорций представлен на рис. 1, где хорошо видна также неоднородность и хаотичность сети.



Рис. 1. Графовая модель УДС г. Владивостока

Помимо неразвитой дорожной сети ситуация усугубляется самой высокой в РФ плотностью автомобилей, составляющей по некоторым данным [5] 566 автомобилей на 1000 человек городского населения.

Подавляющее большинство участников дорожного движения в часы пик во Владивостоке составляют легковые автомобили и миниавтобусы, совершающие преимущественно маятниковые поездки место проживания — место работы и обратно. Именно такие поездки создают пиковые нагрузки на УДС, вызывают основные потери времени и других ресурсов, повышают аварийность и усложняют социально-экономическую ситуацию. Вместе с тем маятниковые поездки трудовой миграции имеют ряд особенностей, делающих их удобным объектом для моделирования. В первую очередь в силу их повторяемости характеристики таких поездок можно считать стационарными, а самих водителей — имеющих полную информацию о возможных издержках на различных маршрутах. Также разумно предполагать совершенный эгоизм участников этих поездок и стремление минимизировать потери времени на проезд. Очевидно и отсутствие коалиционного поведения, за исключением разовых акций, которые в общем-то не связаны с ежедневными регулярными поездками.

Поэтому при исследовании транспортной ситуации во Владивостоке в качестве основной загрузки УДС в утренне-вечерние часы пик были рассмотрены транспортные потоки, порождаемые легковым частным транспортом при трудовой миграции, а в качестве поведенческой модели использован принцип пользовательской оптимизации.

III. Математическая модель конкурентного равновесия

Как уже упоминалось выше, для разработки математической модели конкурентного потокового равновесия УДС Владивостока была представлена ориентированным графом $\Gamma(V, A)$, где V —

множество вершин, A — множество дуг графа. Каждая дуга соответствует реальному участку автодороги без перекрестков, вершины представляют узлы, разделяющие участки дорог. Вершины степени 2 соответствуют существенным поворотам дорог, что для условий рельефа Владивостока также имеет значение при расчете временных затрат на проезд. Направление дуги определяет ход следования автотранспорта по участку дороги. Магистралы с двусторонним движением соответственно имеют парные противоположно ориентированные дуги.

При исследовании потокообразующих факторов в множестве вершин V были выделены два подмножества: $S \subseteq V$, содержащее вершины сети, порождающие потоки, то есть такие, для которых баланс выходящих и входящих потоков положителен, и $D \subseteq V$, содержащее вершины, поглощающие потоки, то есть такие, для которых этот баланс отрицателен. Вершины, принадлежащие S , назовем источниками, принадлежащие D — стоками. Остальные вершины являются транзитными. Применительно к задаче моделирования потоков, порожденных ежедневной трудовой миграцией в утренне-вечерние часы пик, источниками являются спальные районы и пригороды, стоками — деловые и производственные районы города. Декартово произведение $S \times D$ образует множество всех потокообразующих пар в сети Γ .

Существуют различные модели, определяющие объем транспортных перевозок. В данном случае использовался простейший вариант, так называемая модель с фиксированным спросом на перевозки, когда для каждой пары источник–сток $(s, d) \in S \times D$ предполагается заданным общий объем корреспонденции ρ_{sd} , то есть поток, который выходит из узла s и должен прибыть в пункт d . Набор $\rho = \{\rho_{sd} : (s, d) \in S \times D\}$ называется матрицей корреспонденций. При моделировании транспортных потоков рассматриваются и иные варианты, так называемые модели с эластичным спросом (см., напр., [6]), где матрица корреспонденций сама зависит от затрат на проезд. Для Владивостока при достаточно устойчивой концентрации бизнеса в определенных районах города и различного рода обстоятельств, реально сильно ограничивающих мобильность населения, такие модели на данном этапе не рассматривались.

Путем (маршрутом) в сети Γ , соединяющим вершины s и d , назовем последовательность дуг $a_1 = (s \rightarrow k_1)$, $a_2 = (k_1 \rightarrow k_2)$, ..., $a_l = (k_{l-1} \rightarrow k_l)$, $a_{l+1} = (k_l \rightarrow d)$, где $a_t \in A$ при всех $t = 1, \dots, l+1$. Конечно, в маршрутах предполагается отсутствие петель и циклов. Обозначим через P_{sd} множество альтернативных маршрутов, следуя которым для каждой пары $(s, d) \in S \times D$ исходящий из источника s поток достигает стока d . Совокупность всех путей в сети Γ обозначим через $P = \bigcup_{(s, d) \in S \times D} P_{sd}$.

Пусть x_p — это величина потока по пути $p \in P$. Для каждой пары $(s, d) \in S \times D$ объемы корреспонденций ρ_{sd} порождают потоки x_p , которые должны удовлетворять условиям баланса и неотрицательности:

$$X_{sd} = \left\{ x_p \geq 0 : p \in P_{sd}, \sum_{p \in P_{sd}} x_p = \rho_{sd} \right\}.$$

Объединим величины x_p в вектор $x = \{x_p : p \in P\}$, тогда допустимой областью для вектора x является множество

$$X = \prod_{(s, d) \in S \times D} X_{sd} = \left\{ x \geq 0 : \sum_{p \in P_{sd}} x_p = \rho_{sd}, (s, d) \in S \times D \right\}. \quad (1)$$

Проезд по каждому из путей $p \in P$ требует определенных транспортных затрат, зависящих как от характеристик маршрута, так и от интенсивности и плотности движения в сети. Обозначим через $G_p(x)$ удельные затраты на проезд по пути p при существующих потоках x , то есть затраты на перемещение одного транспортного средства по маршруту p .

Во введенных обозначениях равновесные потоки $x^* \in X$ в условиях пользовательской оптимизации характеризуются следующим образом: водители выбирают путь с наименьшими транспортными издержками, поэтому для каждой пары $(s, d) \in S \times D$ если по пути $p \in P_{sd}$ идет ненулевой поток $x_p^* > 0$, то затраты по этому пути минимальны:

$$G_p(x^*) = \min_{q \in P_{sd}} G_q(x^*) = u_{sd}(x^*), \quad (2)$$

где $u_{sd}(x^*)$ — минимальные транспортные затраты для пары (s, d) при загрузке сети потоками x^* .

Удобной и общепринятой математической переформулировкой принципа пользовательской оптимальности является вариационное неравенство (см., напр., [6–8]): найти $x^* \in X$ такой, что

$$\sum_{p \in P} G_p(x^*)(x_p - x_p^*) \geq 0, \quad \forall x \in X. \quad (3)$$

Описание равновесных потоков в виде решения вариационного неравенства позволяет использовать теоретический и алгоритмический аппараты последних для исследования задач транспортного равновесия.

III.1. Функции задержек

Сложность решения задачи (2) критическим образом зависит от характера зависимости удельных затрат $G_p(x)$ от загрузки сети x и в общем случае представляется весьма высокой. Одним из

первых упрощающих предположений является аддитивность затрат по маршруту в зависимости от затрат по дугам, входящим в его состав:

$$G_p(x) = \sum_{a \in A_p} \tau_a(x), \quad (4)$$

где $A_p \subseteq A$ — множество дуг, входящих в маршрут p , $\tau_a(x)$ — удельные затраты на проезд по дуге a при загрузке сети x . Наиболее распространенная форма задания функций $\tau_a(x)$, принятая также и в настоящей работе, выражает временные затраты на проезд по дуге a , монотонно зависящие только от потока y_a по этой дуге:

$$\tau_a(x) = t_a(y_a), \quad y_a = \sum_{p \in P_a} x_p,$$

где $P_a \subseteq P$ — множество маршрутов, проходящих по дуге a . В практике анализа транспортных сетей наиболее популярной является эмпирическая зависимость, известная как BPR-функция (Bureau of Public Road):

$$t_a(y_a) = \bar{\tau}_a(1 + \mu y_a / \bar{y}_a)^n, \quad (5)$$

где $\bar{\tau}_a$ — время проезда по свободной от трафика дороге, \bar{y}_a — пропускная способность дороги, $\mu > 0$ — масштабирующий коэффициент, n — показатель степени, отражающий эффект прогрессивного замедления движения при росте загруженности [9]. Пропускная способность определяет максимальное количество автомобилей, способных проехать по участку дороги в единицу времени. За минимальное время проезда принимают продолжительность движения одного автомобиля с максимальной разрешенной скоростью по свободной дороге. Типично рассматривают значения n порядка 4, коэффициент μ принимают равным 1.

Вместе с тем с формальной точки зрения монотонная функция затрат $\tau_a(x)$ допускает сколь угодно большие значения потоков по магистралям города, что едва согласуется с реальностью и справедливо критикуется. Одна из попыток избежать представление τ_a от упомянутого недостатка описана в работе [4]. В этой работе для каждой дуги $a \in A$ транспортной сети предлагается ввести два вполне измеримых показателя: пропускную способность \bar{y}_a и минимальное время проезда $\bar{\tau}_a$. Далее естественным образом предполагается, что в транспортной сети поток по дуге не может превышать ее пропускную способность, а потраченное на проезд время не может быть меньше, чем минимальное время свободного проезда. Согласно [4], ситуация потокового равновесия в транспортной сети теперь определяется как загрузка ее дуг $y^* = \{y_a^* : a \in A\}$ и временные задержки на дугах $\tau^* = \{\tau_a^* : a \in A\}$, удовлетворяющие ограничениям:

$$0 \leq y_a^* \leq \bar{y}_a, \quad \tau_a^* \geq \bar{\tau}_a, \quad a \in A,$$

и для которых выполнены условия пользовательской оптимальности (2):

$$\tau_a^* \begin{cases} = \bar{\tau}_a, & \text{если } y_a^* < \bar{y}_a, \\ \geq \bar{\tau}_a, & \text{если } y_a^* = \bar{y}_a. \end{cases} \quad (6)$$

Условие (6) показывает, что задержки зависят от потока, но эта зависимость не является непрерывной. В случае полной загрузки сети можно гарантировать лишь только то, что задержки на дугах будут не меньше минимального времени проезда.

Равновесные потоки y^* предлагается искать как решение задачи линейного программирования [4]:

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A} \bar{\tau}_a y_a &\rightarrow \min, \\ y_a &= \sum_{s \in S} y_a^s \leq \bar{y}_a, \quad y_a^s \geq 0, \quad a \in A, \quad s \in S, \\ \sum_{a \in A_v^+} y_a^s - \sum_{a \in A_v^-} y_a^s &= \rho_{sv}, \quad (s, v) \in S \times V, \end{aligned} \quad (7)$$

где y_a^s — поток по дуге a , порождаемый источником $s \in S$, $A_v^+ = \{a \in A : \text{дуга } a \text{ входит в вершину } v\}$, $A_v^- = \{a \in A : \text{дуга } a \text{ выходит из вершины } v\}$.

Условие (6) независимости времени проезда по дуге от загрузки вплоть до достижения предельного значения выглядит весьма идеализированным, поскольку реальная практика вождения показывает, что с увеличением числа автомобилей на дороге скорость движения все-таки уменьшается. Поэтому вопрос о степени применимости этого подхода к транспортной системе Владивостока представлял самостоятельный интерес и также рассмотрен в данной работе.

III.2. Фактографическое обеспечение моделей

Дальнейшая работа над задачей (2) заключалась в следующих этапах:

- 1) построении графовой модели УДС Владивостока;
- 2) выделении в ней множеств источников S и стоков D и определении значений элементов матрицы корреспонденций ρ_{sd} ;
- 3) определении множества маршрутов P ;
- 4) вычисления равновесных потоков x^* как решения двух альтернативных задач — вариационного неравенства (3) и задачи линейного программирования (7).

Исходная графовая модель УДС Владивостока, изображенная на рис. 1, была построена по данным геоинформационных систем и включала дороги четырех категорий, в том числе внутриквартальные подъезды к домам, грунтовые дороги через лесные массивы. Хотя на практике и эти пути используются для сквозного движения или объезда пробок, но все же они не играют особой роли в переносе основного потока автотранспорта

и при расчетах использованы не были. В результате для расчетов рассмотрена сеть, состоящая из 537 вершин и 1128 ориентированных дуг, изображенная на рис. 2. В рассматриваемой транспортной сети было выделено 37 потокообразующих вершин, каждая из которых одновременно являлась источником и стоком.

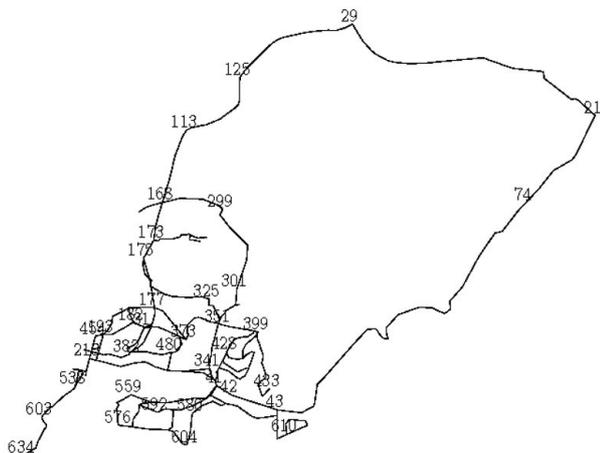


Рис. 2. Графовая модель УДС Владивостока, дороги категорий 3 и 4. Пронумерованы потокообразующие вершины

Для определения объемов корреспонденций между выделенными вершинами использовалась так называемая модифицированная гравитационная модель (см., напр., [10, 11]), представляющая матрицу корреспонденций в виде

$$\rho_{sd} = \alpha_s \beta_d Q_s R_d f(c_{sd}),$$

где параметры α_s и β_d находятся из решения системы уравнений

$$\alpha_s = \left(\sum_{d \in D} \beta_d R_d f(c_{sd}) \right)^{-1},$$

$$\beta_d = \left(\sum_{s \in S} \alpha_s Q_s f(c_{sd}) \right)^{-1}, \quad (8)$$

Q_s — общий объем исходящего потока из источника $s \in S$, R_d — общий объем входящего потока в сток $d \in D$, c_{sd} — мера удельных затрат на передвижение для пары $(s, d) \in S \times D$, $f(c_{sd})$ — функция, характеризующая предпочтение индивидуумов по перемещению из пункта s в пункт d .

Для определения объемов Q_s и R_d территория Владивостока была поделена на квадратные зоны 800×800 м. Интерактивная карта города, фрагмент которой изображен на рис. 3, позволила получить детальную информацию о застройке каждой зоны: тип здания (жилое, производственное предприятие, образовательное учреждение, торговый комплекс, бизнес-центр, медицинское учреждение и т.п.) и его этажность, что помогло подсчитать количество жилых домов разной этажности, выявить предприятия, организации и учреждения, формирующие рабочие места в каждой из рассматриваемых зон.

По таблице соответствия этажности здания и проживающих в нем людей был определен объем населения в каждой зоне. В результате таких подсчетов, суммируя количества проживающих по всем зонам, общий объем населения Владивостока получился равным 587 768 человекам, что всего лишь на 1,5% отличается от данных переписи 2008 года. Согласно официальной статистике уровень занятости населения в экономике Владивостока составляет 60% от общего числа жителей. Предполагалось, что именно эта часть населения города порождает трудовую миграцию. Учитывая полученные с помощью интерактивной карты данные по типам предприятий, организаций, учреждений и используя информацию из статистических сборников, аналитических записок и деловой прессы Владивостока, было определено количество рабочих мест в каждом квадрате и построена зональная матрица отправлений и прибытий для трудовой миграции по 638 квадратам. Далее, за каждой из 37 выделенных вершин в графе были закреплены близлежащие зоны, что дало объемы исходящих Q_s и входящих R_d потоков для этих вершин.



Рис. 3. Пример одной квадратной зоны на интерактивной карте г. Владивостока

В качестве удельных затрат c_{sd} на передвижение из пункта s в пункт d рассмотрено время, необходимое для того, чтобы добраться из s в d по кратчайшему пути со скоростью 40 км/ч. Функция $f(c_{sd})$ определена в традиционной для трудовой миграции форме: $f(c_{sd}) = \exp(-\gamma c_{sd})$, где параметр калибровки $\gamma = 0,065$.

Значения параметров α_s и β_d , удовлетворяющих системе уравнений (8), находились с помощью алгоритма балансировки [12], что завершило построение матрицы корреспонденций $\rho = (\rho_{sd} : (s, d) \in S \times D)$.

Для проверки достоверности сделанных расчетов в «узких» местах УДС Владивостока, то есть на дугах, движение по которым является един-

ственно возможным способом попасть из одной агрегированной территориальной зоны в другую, были сделаны натурные замеры потока автотранспорта. Максимальная абсолютная ошибка в подсчетах была равна 382 автомобилям, или 14% от наблюдаемого значения, что при таких приближенных оценках можно считать вполне приемлемым.

Поиск транспортного равновесия как решения вариационного неравенства (3) предполагает задание множества допустимых маршрутов для каждой пары источник–сток. В развитых транспортных сетях реальных масштабов для одной пары источник–сток можно построить комбинаторно большое количество возможных вариантов передвижения, но учитывая специфику УДС Владивостока, имеющую протяженную (в одном направлении) древовидную структуру и не имеющую большого количества дублирующих маршрутов, множество маршрутов P строилось с помощью алгоритма Йена поиска k -кратчайших путей, где максимально возможное значение k принято равным 10. В результате было выделено 13 202 пути.

Пропускная способность \bar{y}_a и минимальное время свободного проезда $\bar{\tau}_a$ для каждой дуги $a \in A$ соответствовали нормативной пропускной способности одной полосы в 1500 автомобилей в час и скорости движения 40 км/ч.

III.3. Алгоритмическое обеспечение

Эквивалентность задачи транспортного равновесия вариационному неравенству, а в частном случае оптимизационной задаче, позволяет адаптировать численные методы решения последних для поиска равновесных потоков.

К настоящему времени можно выделить два основных подхода к построению алгоритмических схем: в первом поиск равновесных потоков ведется по дугам сети (дуговые алгоритмы), во втором — по допустимым маршрутам (маршрутные алгоритмы). И в первом, и втором случаях основная трудность при численных расчетах состоит в большой размерности решаемых задач, особенно на реальных транспортных сетях.

Богатый практический опыт накоплен для частного случая, когда транспортное равновесие ищется как решение оптимизационной задачи с искусственной целевой функцией $f(y) = \sum_{a \in A} \int_0^{y_a} \tau_a(z) dz$ и линейными ограничениями-балансами (1). Наиболее распространенным дуговым алгоритмом является метод Франка–Вульфа [13], несмотря на то, что этот алгоритм имеет довольно медленную сходимость, существенно замедляющуюся при приближении к равновесию и весьма чувствительному к размерности задачи. Причиной такого поведения является как практически неизбежно вырождающийся характер вспомогательной задачи линей-

ного программирования, так и неравномерная сходимость потоков к равновесным значениям или так называемый эффект «застревающих потоков» [14–16] — в процессе решения формируется некоторый набор дуг, по которым потоки сильно отличаются от равновесных, и такая ситуация медленно меняется при последующем итерировании.

Маршрутные алгоритмы распределяют корреспонденции непосредственно по множеству альтернативных путей, причем это множество, как правило, формируется в процессе решения [17, 18]. Перераспределение потоков не по дугам, а сразу по маршрутам позволяет своевременно уйти от «застревающих потоков», поэтому алгоритмы данного класса не обладают отмеченным недостатком метода Франка–Вульфа и сходятся более равномерно, однако и здесь есть свои проблемы. Основная идея алгоритмов состоит в последовательной балансировке потоков между альтернативными маршрутами для каждой пары источник–сток. Поскольку перераспределение одного потока между маршрутами изменяет транспортные затраты во всей сети и тем самым влияет на распределение других корреспонденций, то возникает необходимость многократного просмотра всех потокообразующих пар и повторения перераспределения потоков. Отсутствие необходимости априорного задания всех допустимых маршрутов для каждой пары источник–сток, с одной стороны, делает алгоритмы поиска равновесия по путям привлекательными для использования, с другой, — как показала вычислительная практика [14, 18], такие алгоритмы сводят к минимуму количество используемых путей, то есть теряется возможность равномерного расщепления корреспонденции по множеству привлекательных маршрутов.

Поиск транспортного равновесия как решения вариационного неравенства (3) исследован в основном теоретически. Хотя алгоритмический аппарат для вариационных неравенств разработан достаточно хорошо, о чем свидетельствуют монографии [19, 20], но большое количество переменных, непотенциальные и неаддитивные функции транспортных затрат на практике делают задачу (3) труднорешаемой. Среди существующих методов решения вариационных неравенств отдельно можно выделить проективные методы, отличающиеся простотой своих итерационных схем:

$$x^{k+1} = \pi_X(x^k - \lambda_k G(x^k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где $\pi_X(y) = \operatorname{argmin}\{\|y - x\| : x \in X\}$ — проекция точки y на множество X , $\lambda_k > 0$ — шаговый множитель. Для простых множеств (гиперплоскость, полупространство, шар, брус и т.п.) операция проектирования вычисляется аналитически, в общем случае требуется решать задачу квадратичного программирования, что значительно усложняет общий процесс. При выборе шага $\lambda_k \rightarrow +0$,

$\sum \lambda_k = \infty$ проективный метод сходится к равно-
весному распределению при весьма общих предпо-
ложениях о свойствах задачи, однако на практи-
ке такой выбор ведет к очень медленной скорости
сходимости.

Несмотря на то, что при моделировании тра-
фика в УДС Владивостока предполагалось, что
транспортные задержки по дуге зависят от за-
грузки только этой дуги и задача транспортного
равновесия эквивалентна оптимизационной зада-
че, для численных расчетов использовался проек-
тивный метод (9) с применением идеи декомпози-
ции допустимого множества X . Такой выбор мето-
да (9) сделан в расчете на будущие исследования,
поскольку более адекватное моделирование все-
таки требует рассмотрения общего случая непо-
тенциальной функции $G(x) = (G_p(x) : p \in P)$ и
решения именно вариационного неравенства (3).

Для декомпозиции и ускорения сходимости
процесса (9) предполагается применить подходы,
основанные на теории фейеровских процессов с
малыми возмущениями [21, 22] с использованием
адаптивной регулировки шага [23]. Основная идея
этого подхода заключается в следующем. Допу-
стимое множество X из (1) можно представить
в виде пересечения конечного числа гиперплоско-
стей H_{sd} и неотрицательного ортанта H^+ :

$$X = \bigcap_{(s,d) \in S \times D} H_{sd} \cap H^+,$$

где $H_{sd} = \{x_p : \sum_{p \in P_{sd}} x_p = \rho_{sd}\}$, $H^+ = \{x_p \geq 0 : p \in P\}$. Объединим супермножества H_{sd} и H^+ в семейство множеств $\mathcal{H} = \{H^+, H_{sd} : (s,d) \in S \times D\} = \{\mathcal{H}_i : i = 1, 2, \dots, |S \times D| + 1\}$. Опера-
ция проектирования $\pi_{\mathcal{H}_i}(\cdot)$ для любого элемента \mathcal{H}_i вычисляется аналитически. Поэтому для чис-
ленных расчетов транспортных потоков исполь-
зовалась следующая модификация процесса (11),
получившая название метода последовательных
проекции [24]:

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k v^k, \quad v^k = (\pi_{\mathcal{H}_i}(\bar{x}^k) - x^k) / \lambda_k,$$

$$\mathcal{H}_i \in \mathcal{H}, \bar{x}^k = x^k - \lambda_k G(x^k) \notin \mathcal{H}_i, \quad (10)$$

$$\lambda_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

Значительного ускорения сходимости процес-
са (10) к равносному решению удается достичь
за счет адаптивного выбора шагового множителя
 λ_k . Обозначим $V(k,m) = \text{conv}\{v^k, v^{k+1}, \dots, v^m\}$ —
выпуклую оболочку векторов v^k, v^{k+1}, \dots, v^m —
через $B = \{x : \|x\| \leq 1\}$ — единичный шар.
Для заданной последовательности $\theta_t \rightarrow +0$ при
 $t \rightarrow \infty$ определим последовательность индексов
 $\{k_t\}$. Шаговые множители λ_k определялись по
следующим правилам.

- 1) при $t = 0$ полагается $k_t = 0$, $\lambda_0 > 0$ — произ-
вольное, $q \in (0,1)$;
- 2) для данных t и k_t определяется индекс k_{t+1}
такой, что $0 \notin V(k_t, s) + \theta_t B$, $\lambda_s = \lambda_{k_t}$,
 $k_t \leq s < k_{t+1}$, $0 \in V(k_t, k_{t+1}) + \theta_t B$;
- 3) положить $\lambda_{k_{t+1}} = q \lambda_{k_t}$;
- 4) увеличить номер итерации $t = t + 1$ и по-
вторить вычисление (10) для текущего зна-
чения λ_k .

Другими словами, по условию п. 2 первый пе-
реход к шагу k_{t+1} после k_t осуществляется тогда,
когда $0 \in \text{conv}\{v^{k_t}, v^{k_t+1}, \dots, v^{k_{t+1}}\} + \theta_t B$, при этом
шаговый множитель уменьшается, согласно п. 3,
в $q < 1$ раз.

IV. Численные эксперименты

IV.1. Расчеты для существующей транспортной сети

Размерность решаемых задач поиска транс-
портного равновесия в рассматриваемой транс-
портной сети приведена в табл. 2, откуда видно,
что «габариты» задач даже для сокращенной сети
весьма велики.

Т а б л и ц а 2

Размерность решаемых задач

	Задача (3)	Задача (7)
Неотрицательные переменные	13202	41736
Балансовые ограничения	1332	19869
Ограничения пропускной способности	—	1128

Транспортные затраты $G_p(x)$ предполагались
аддитивными (4), задержки по дугам имели вид
BPR-функции (5). Для решения вариационно-
го неравенства (3) средствами CNU Octave [25]
был реализован метод последовательных проек-
ций (10). Для решения задачи линейного програм-
мирования (7) использовался пакет GNU Linear
Programming Kit [26].

Прежде всего отметим, что на исходных дан-
ных задача (7) оказалась недопустимой. Причи-
ной недопустимости являлось ограничение на про-
пускную способность сети — максимальная про-
пускная способность дуг \bar{y}_a не позволила пропу-
стить рассчитанные для часа пик корреспонден-
ции трудовой миграции ρ_{sd} . Для выявления про-
блемных мест в сети задача (7) решалась без учета
ограничений $y_a \leq \bar{y}_a$, а именно

$$\sum_{a \in A} \bar{\tau}_a \sum_{s \in S} y_a^s \rightarrow \min,$$

$$\sum_{a \in A_v^+} y_a^s - \sum_{a \in A_v^-} y_a^s = \rho_{sv}, \quad (s, v) \in S \times V,$$

$$y_a^s \geq 0, \quad a \in A, s \in S. \quad (11)$$

На рис. 4 непрерывным черным цветом выделены наиболее проблемные участки УДС Владивостока, для которых, чтобы пропустить корреспонденции ρ_{sd} , необходимо расширить дорогу более чем на половину полосы движения в одну сторону.



Рис. 4. Наиболее проблемные участки УДС г. Владивостока. Модель стационарной динамики

Всего получено 97 проблемных участков, среди которых присутствуют дороги, требующие расширения на целых три полосы движения в одну сторону. Учитывая тот факт, что все эти 97 дуг принадлежат к магистралям центральной части города, то такое масштабное расширение практически невозможно. После того как пропускную способность всей сети увеличили в три раза, решение задачи (7) было найдено, при этом среди условий на пропускную способность остались активные ограничения.

Вариационное неравенство (3) для рассматриваемой задачи транспортного равновесия (2) всегда разрешимо, и алгоритм последовательных проекций приводит с определенной точностью к равновесным потокам. Характер сходимости процесса (10) проиллюстрирован на рис. 5, откуда видно, что сходимость имеет степенной характер, то есть точность решения ведет себя как $O(k^{-\alpha})$, где k — количество итераций, α — показатель степени скорости сходимости.

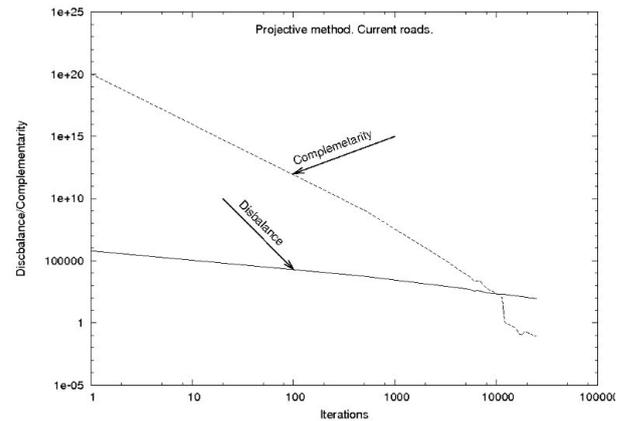


Рис. 5. Сходимость метода последовательных проекций

Сравнение полученных значений загрузки дуг сети y_a^* с их пропускной способностью \bar{y}_a также выявило наличие элементов, на которых поток превышает пропускную способность. Однако в отличие от решения задачи (7) таких элементов всего три, все они также принадлежат центральной части города.

Последующий анализ состоял в сравнении рассчитанных потоков с натурными замерами на магистралях города. В утренний час пик на 16 участках УДС Владивостока в течение 60 минут подсчитывались проезжающие легковые автомобили. На рис. 6 представлена гистограмма, отображающая рассчитанные и наблюдаемые потоки для каждого из участков.

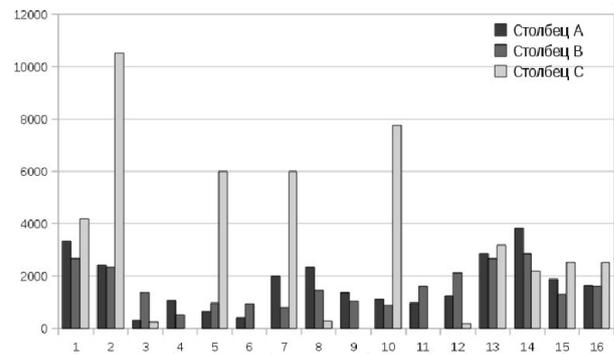


Рис. 6. Гистограмма для рассчитанных и наблюдаемых потоков

Stолбец А характеризует рассчитанные транспортные потоки, полученные путем решения вариационного неравенства (3) с непрерывными монотонными функциями задержек (5). Stолбец В характеризует наблюдаемые потоки в час пик на улицах города. Stолбец С характеризует потоки, полученные в результате решения задачи линейного программирования (11), функции задержек определяются условием (6). Как видно из гистограммы, результаты расчетов для вариационного неравенства более близки к натурным замерам, чем результаты, полученные вследствие решения задачи (11).

Такой вывод подтверждает и гистограмма, изображенная на рис. 7, где столбец А и столбец

B представляют соответственно отклонения произведенных расчетов при решении вариационного неравенства (3) и задачи линейного программирования (11) от натуральных замеров.

Максимальная абсолютная ошибка вычислений, полученная при решении вариационного неравенства, равна 1298 автомобилям, что означает превышение в 2.5 раза рассчитанного потока над наблюдаемым, или относительную ошибку 150%. Максимальная абсолютная ошибка вычислений, полученная при решении задачи линейного программирования (11), равна 8161 автомобилю, что означает превышение в 4.5 раза рассчитанного потока над наблюдаемым, или относительную ошибку 350%.

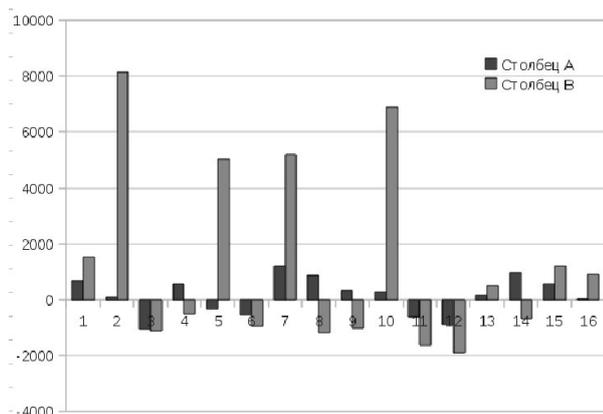


Рис. 7. Гистограмма отклонения рассчитанных потоков от наблюдаемых

Минимальная абсолютная ошибка вычислений, полученная при решении вариационного неравенства, равна 34 автомобилям, что означает превышение в 1.02 раза рассчитанного потока над наблюдаемым, или относительную ошибку 2%. Минимальная абсолютная ошибка вычислений, полученная при решении задачи линейного программирования (11), равна 498 автомобилям, что означает превышение в 1.19 раза рассчитанного потока над наблюдаемым, или относительную ошибку 19%.

Среднее отклонение рассчитанных потоков от натуральных замеров составило 540.38 автомобиля при решении вариационного неравенства (3) и 2551.4 автомобиля — при решении задачи линейного программирования (11).

IV.2. Прогноз загрузки перспективной сети

Генеральный план развития транспортной инфраструктуры Владивостока до 2025 года включает три очередности модернизации УДС города — первая очередность, на расчетный срок (до 2012 г.) и дальнейшие изменения вплоть до 2025 года [27]. При анализе влияния на транспортную ситуацию ввода в эксплуатацию новых дорог учитывались только изменения первой очереди. На рис. 8 представлена УДС Владивостока ближайшего будущего, где черным цветом выделены как

новые, так и существующие участки магистралей, которые подлежат ремонту и расширению.

По произведенным подсчетам общая протяженность модернизированных дорог равна 33.72 км, в том числе будет введено в эксплуатацию 16.65 км новых магистралей. В настоящее время идет активное строительство выделенных участков.

Обозначим через $\tilde{\Gamma} = (\tilde{A}, \tilde{V})$ граф, описывающий перспективную УДС первой очередности строительства. Предварительный анализ показал, что для множества вершин V суммарная длина кратчайших путей в графе $\tilde{\Gamma}$ уменьшилась на 4%. В среднем кратчайшие пути в новой сети стали короче на 415 м. Кратчайший путь сократился для 17% пар вершин из общего числа 288 369.

Поскольку в существующей транспортной сети определение равновесных потоков как решения вариационного неравенства (3) привело к более реалистичным результатам, чем расчеты по модели стационарной динамики, для вычисления загрузки новой сети $\tilde{\Gamma}$ далее использовался метод последовательных проекций (10).



Рис. 8. Перспективная УДС Владивостока

Безусловно новые дороги станут побудительным мотивом для развития инфраструктуры города, появятся новые бизнес-зоны, жилые массивы. Однако предположим, что это произойдет не так быстро и в ближайшие пару лет сформированная матрица корреспонденций ρ не претерпит существенных изменений. Поэтому загрузку перспективной сети $\tilde{\Gamma}$ будем определять для тех же пар потокообразующих вершин $(s, d) \in S \times D$ с фиксированными объемами корреспонденций ρ_{sd} . Вид функций транспортных затрат также оставим прежним (5).

На рис. 9 показано, как изменится загрузка существующих дуг A в перспективной сети $\tilde{\Gamma}$: черным цветом выделены участки, на которых поток уменьшится, серым — участки, на которых поток увеличится, пунктиром обозначены новые дороги.

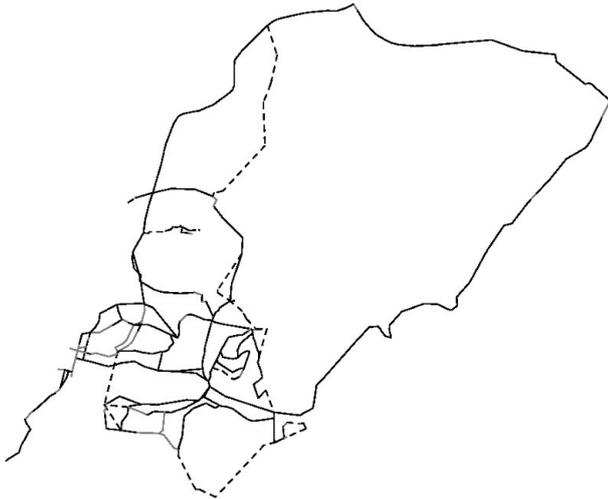


Рис. 9. Изменение загрузки дуг перспективной сети

Из рисунка видно, что практически на всех дугах объемы потоков уменьшились. Однако существуют и участки, по которым поток увеличился, а значит, возросли транспортные затраты. Но это не портит общей положительной картины, поскольку системные задержки в новой сети сократятся на 3090 часов. Проведенные расчеты показывают, что строительство новых дорог не приведет к транспортным парадоксам и ситуация на дорогах города существенно улучшится.

В перспективной сети осталось четыре дуги, по которым поток превышает пропускную способность, однако превышение получилось незначительным: минимальное составило 170, максимальное — 755 автомобилей.

V. Заключение

По результатам выполненной работы можно сделать следующие выводы. Модель равновесных конкурирующих потоков с непрерывными монотонными функциями задержек лучше описывает усредненные значения транспортных потоков трудовой миграции, чем модель, в которой задержки удовлетворяют условию (6). Отсутствие ограничения на пропускную способность дуг транспортной сети при решении вариационного неравенства (3) не приводит к абсурдным решениям, поскольку регулирующую роль на пропускную способность оказывает свойство монотонной зависимости задержек от величины потока. Есть полное основание считать, что дальнейшее уточнение исходных данных, таких как полосность и направление всех элементов УДС, объемов корреспонденций, вида функций задержек $G_p(x)$ и $\tau_a(x)$, а также увеличение наблюдений за автотрафиком, позволит повысить точность прогнозов с использованием модели конкурентного равновесия.

Численные расчеты транспортных потоков в перспективной УДС на основе теории равновесия показали, что первый этап модернизации сети, запланированный в генеральном плане развития города, снизит нагрузку на большинстве участков

дорог и сократит общие транспортные задержки на проезд.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 09-01-00042 и проекта ДВО РАН 09-III-A-01-004.

Литература

1. Beckmann M., McGuire C.B., Winsten C.B. Studies in the economics of transportation. — New Haven: Yale University Press, 1956.
2. Wardrop J. Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research // Proceedings of the institute of Engineers. — 1952.
3. Boyce D. A retrospective on Beckmann, McGuire and Winsten «Studies in the Economics of Transportation» // Papers in Regional Science. — 2005. — V. 84. — P. 85–103.
4. Nesterov Yu., De Palma A. Stationary dynamic solutions in congested transportation networks: summary and perspectives // Networks and Spatial Economics. — 2003. — V. 3. — P. 371–395.
5. Autonews om 24.09.2008. <http://www.autonews.ru/autobusiness>
6. Nagurney A. Network Economics: A Variational Inequality Approach (second revised edition). — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
7. Dafermos S. Traffic Equilibrium and Variational Inequalities // Transportation Science. — 1980. — V. 14. — P. 42–54.
8. Попов Л.Д. Введение в теорию, методы и экономические приложения задач о дополнителности. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2001.
9. Стенбринк П. Оптимизация транспортных сетей. — М.: Транспорт, 1981.
10. Васильева Е.В., Игудин Р.В., Лившиц В.Н. Оптимизация планирования и управления транспортными системами. — М.: Транспорт, 1987.
11. Вильсон А.Д. Энтропийные методы моделирования сложных систем. — М.: Наука, 1978.
12. Arrowsmith G.A. A behavioural approach to obtaining a doubly constrained trip distribution model // Operational Research Quarterly. — 1973. — V. 24, N. 1. — P. 101–111.
13. Frank M., Wolfe P. An algorithm for quadratic programming // Naval Research Logistics Quarterly. — 1956. — V. 3. — P. 95–110.
14. Швецов В.И. Алгоритмы распределения транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 10. — С. 148–157.
15. Boyce D., Ralevic-Dekic B., Bar-Gera H. Convergence of traffic assignments: how much is enough? // Journal Transport Engineer. — 2004. — V. 130, № 1. — P. 49–55.
16. Janson B., Zozaya-Gorostiza C. The problem of cyclic flows in traffic assignment // Transportation Research Part B. — 1987. — V. 21. — P. 299–310.

17. *Patriksson M.* The traffic assignment problem — models and methods // Utrecht. — Netherlands: VSP, 1994.

18. *Bar-Gera H.* Origin-based algorithm for the traffic assignment problem // Transportation Science. — 2002. — V. 36, N 4. — P. 398–417.

19. *Facchinei F., Pang J.-S.* Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems — Springer, 2003.

20. *Konnov I.V.* Combined relaxation methods for variational inequalities. — Berlin: Springer, 2001.

21. *Нурминский Е.А.* Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 2008. — Т. 48, вып. 12. — С. 2121–2128.

22. *Нурминский Е.А.* Фейеровские процессы с малыми возмущениями // Доклады АН. — 2008. — Т. 422, вып. 5. — С. 601–605.

23. *Nurminski E.A.* Envelope stepsize control for iterative algorithms based on Fejer processes with attractants // Optimization Methods and Software. — 2010. — V. 25, N. 1. — P. 97–108.

24. *Шамрай Н.Б.* Решение задач транспортного равновесия с декомпозицией по ограничениям // Труды всероссийской конференции «Равновесные модели в экономике и энергетике». — Иркутск: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2008. — С. 618–624.

25. *GNU Octave.*
<http://www.gnu.org/software/octave/>

26. *GNU Linear Programming Kit.*
<http://www.gnu.org/software/glpk/>

27. *Генеральный план Владивостокского городского округа* <http://vlc.ru/architect/genplan.htm>

Поступила в редакцию 15.10.2010.