На правах рукописи

Шамрай Наталья Борисовна

ВАРИАЦИОННО-ПОДОБНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ РАВНОВЕСИЯ И КОРРЕКЦИИ НЕСОВМЕСТНЫХ СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Казань — 2007

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Омский государственный технический университет" и Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Дальневосточный государственный университет".

Научные руководители:
кандидат физико-математических наук, доцент
Зыкина Анна Владимировна
доктор физико-математических наук, профессор
Нурминский Евгений Алексеевич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Коннов Игорь Васильевич
доктор физико-математических наук, ст. научный сотрудник
Попов Леонид Денисович

Ведущая организация:
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва.

Защита диссертации состоится 26 апреля в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, корп. 2, ауд. 217.

С диссертационной работой можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 25 марта 2007 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
к.ф.-м. н., доцент Задворнов О.А.

Задворн

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена исследованиям в области вариационных неравенств и их обобщений. Задача решения вариационного неравенства, обозначаемая далее как $VI(G, X)$, состоит в поиске точки $x^* \in X$ такой, что

$$\langle G(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X, \tag{1}$$

где $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое замкнутое выпуклое множество, $G : X \to \mathbb{R}^n$ — заданное отображение.

Вариационные неравенства представляют собой унифицированный аппарат для изучения многих задач из различных областей знаний, например, таких как механика, физика, экономика, исследование операций и так далее. Широкий спектр возможных приложений вызвал интерес к неравенству (1) у многих исследователей, что привело к формированию теории для $VI(G, X)$ как самостоятельного раздела прикладной математики. Значительный вклад в общую теорию вариационных неравенств внесли Г. Фикера, Г. Стампаккья, Ф.Е. Браудер, Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер, Г. Дюво, Д. Киндерлерер, К. Байокки, А. Капело.

В настоящее время существуют и интенсивно изучаются задачи, обобщающие неравенство (1). Одним из таких обобщений является задача равновесия, которая состоит в поиске точки $x^* \in X$ такой, что

$$\Phi(x^*, x) \geq 0 \quad \forall x \in X, \tag{2}$$

где $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое замкнутое выпуклое множество, $\Phi : X \times X \to \mathbb{R}$ — заданная бифункция такая, что $\Phi(x, x) = 0$ для любых $x \in X$. Весомый вклад в теорию и методы решения (2) внесли Дж. Б. Розен, Фань Цзи, Х. Никайдо, Е. Блюм, В. Эттли, Ж.-П. Обен, И.В. Коннов, А.С. Антипин и другие ученые.

В диссертационной работе рассматривается задача решения вариационно-подобного неравенства, обозначаемая далее как

$VLI(G,F,X)$, которая состоит в поиске точки $x^* \in X$ такой, что

$$\langle G(x^*), F(x) - F(x^*) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X, \tag{3}$$

где $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое замкнутое выпуклое множество, $G, F : X \to \mathbb{R}^m$ — непрерывные однозначные отображения.

Побудительным мотивом к изучению $VLI(G,F,X)$, в частности, служит возможность преобразования исходного вариационного неравенства (1) в вариационно-подобное (3) с целью улучшения вычислительных свойств исходной задачи (сокращение размерности, упрощение допустимой области и т.п.). Кроме того, при помощи вариационно-подобных неравенств (3) можно проводить полную или частичную параметрическую коррекцию несовместных систем неравенств, что позволяет получить обобщенные решения рассматриваемых некорректных систем. В терминах $VLI(G,F,X)$ естественным образом записываются условия равновесия экономических систем.

Цель работы. Основная цель работы состоит в изучении свойств вариационно-подобных неравенств (3), получении условий существования и единственности решений, разработке и тестировании численных методов решения, применении полученных результатов для поиска обобщенных решений несовместных систем неравенств и точек равновесия в транспортных системах с эластичным спросом.

Методы исследования. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается доказательствами с использованием аппарата выпуклого и негладкого анализа, математического программирования, теории задач дополнительности, вариационных неравенств и задач равновесия. Результаты, полученные в процессе проведения численных экспериментов, подтверждают теоретические выкладки.

Научная новизна. Предложена постановка вариационно-подобного неравенства вида (3) и установлена взаимосвязь с некоторыми существующими формами задач решения вариационных неравенств и задачами равновесия. Получены условия существования и единственности решения (3). Для решения $VLI(G, F, X)$ построены схемы проективного и экстраградиентного методов и доказана их глобальная сходимость, разработан метод локальных выпуклых мажорант и доказана его локальная сходимость. С помощью вариационно-подобных неравенств проведена параметрическая коррекция несовместных систем неравенств, получены условия существования обобщенных решений некорректных систем. Рассмотрено применение $VLI(G, F, X)$ для решения задач транспортного ценового равновесия.

На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационной работы.

1. Теоремы существования решений $VLI(G, F, X)$ на ограниченном и неограниченном допустимом множестве в предположении свойств квази- и 0-диагональной выпуклости.

2. Теорема единственности решения $VLI(G, F, X)$ в предположении свойства строгой F-псевдомонотонности и теоремы существования и единственности решения в предположении свойств сильной F-монотонности, (квази-, 0-диагональной) выпуклости, липшицевости отображений.

3. Теорема эквивалентности $VLI(G, F, X)$ вариационно-подобных неравенств проективного отображения. Схемы проективного и экстраградиентного методов для решения (3) и условия их глобальной сходимости.

4. Метод локальных выпуклых мажорант для решения (3) и обоснование его локальной сходимости.

5. Схема параметрической коррекции несовместных систем неравенств с помощью $VLI(G, F, X)$ и теоремы существования обобщенных решений у некорректных систем.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит в основном теоретический характер. Полученные результаты расширяют теорию существования решений для вариационно-подобных неравенств. Построенные алгоритмы вносят вклад в развитие численных методов решения вариационно-подобных неравенств. При помощи аппарата $VLI(G, F, X)$ можно проводить полную или частичную коррекцию несовместных систем неравенств, эквивалентно переформулировать вариационные неравенства (1) с целью уменьшения размерности и улучшения других вычислительных свойств задачи, решать задачи транспортного ценового равновесия.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на: Международных научно-технической конференциях "Динамика систем, механизмов и машин" (Омск, 12-14 ноября 2002 г., 16-18 ноября 2004), Всероссийских конференциях "Проблемы оптимизации и экономические приложения" (Омск, 1-5 июля 2003 г., 11-15 июля 2006 г.), Всероссийской научной молодежной конференции "Под знаком "Сигма" (Омск, 26-28 июня 2003 г.), Российской конференции "Дискретный анализ и исследование операций" (Новосибирск, 28 июня-2июля 2004 г.), Байкальской международной школе-семинаре "Методы оптимизации и их приложения" (Северобайкальск, 2-8 июля 2005 г.), летней школе INTAS "Нелинейный анализ в приложениях к экономике, энергетике и транспорту" (Бергамо, Италия, 5-9 июня 2006), научных семинарах кафедры "Автоматизированные системы обработки информации и управления" Омского государственного технического университета (Омск, 2003-2006 гг.), лаборатории дискретной оптимизации Омского филиала Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омск, 2003, 2006 гг.), отделения математического моделирования НИИММ им. Н.Г. Чеботарева (Казань, 2004 г.), кафедры "Математические методы в экономике" Института математики и компьютерных наук Дальневосточного государственного университета (Владивосток, 2006, 2007 гг.).

Публикации. Результаты диссертационной работы изложены в 15 работах, в том числе две статьи, [3] и [15], в изданиях из списка ВАК.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 117 страницах и содержит 1 таблицу и 8 рисунков. Список литературы состоит из 140 наименований.

Работа выполнена в двух организациях: на кафедре "Автоматизированные системы обработки информации и управления" Омского государственного технического университета — научный руководитель доцент, к.ф.-м.н А.В. Зыкина и на кафедре "Математические методы в экономике" Института математики и компьютерных наук Дальневосточного государственного университета — научный руководитель профессор, д.ф.-м.н Е.А. Нурминский.

Под руководством А.В. Зыкиной автором были получены следующие результаты: предложена постановка задачи решения вариационно-подобного неравенства вида (3), установлена связь с некоторыми другими существующими формами вариационных неравенств и задачами равновесия, получены условия существования и единственности решений $VLI(G, F, X)$, предложены схемы проективного и экстраградиентного методов для решения $VLI(G, F, X)$, исследована параметрическая коррекция несовместных систем неравенств и получены условия существования обобщенных решений.

Под руководством Е.А. Нурминского автором были получены следующие результаты: предложена оценочная функция для вариационно-подобного неравенства (3), исследованы ее свойства, получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи минимизации оценочной функции, предложен метод локальных выпуклых мажорант для решения $VLI(G, F, X)$, дано его обоснование, рассмотрено приложение вариационно-подобных неравенств (3) к задачам транспортного ценового равновесия, проведена программная реализация всех предлагаемых в диссертационной работе алгоритмов, проделаны численные эксперименты.

Исследования диссертационной работы проводились в рамках госбюджетных научно-исследовательских работ ОмГТУ (регистрационный номер НИР 1.4.01.Ф), получили поддержку в рамках программы 17 фундаментальных исследований президиума РАН, гранта РФФИ 04-07-90287-В "Информационное обеспечение и высокопроизводительные вычисления в интегрированной сети ДВО РАН".

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведен краткий обзор работ, посвященных исследованиям в области вариационных неравенств и задач равновесия, указаны ведущие направления в построении теории разрешимости этих задач, перечислены основные методы поиска решений. Заявлена тема диссертационных исследований и обоснована ее актуальность. Изложено краткое содержание диссертационной работы.

Первая глава состоит из трех разделов и посвящена теоретическим исследованиям $VLI(G, F, X)$ на предмет существования и единственности решений.

В первом разделе приведена постановка задачи решения вариационно-подобного неравенства (3). Показана взаимосвязь с задачей равновесия (2) и некоторыми существующими формами вариационных неравенств. Наряду с $VLI(G, F, X)$ рассмотрена задача решения дуального вариационно-подобного неравенства, которая состоит в поиске точки $x^* \in X$ такой, что

$$\langle G(x), F(x) - F(x^*)\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X. \tag{4}$$

Во втором разделе доказаны теоремы существования решений $VLI(G, F, X)$. Показано, что преобразование вариационно-подобного неравенства (3) в вариационное неравенство с многозначным отображением и последующее использование условий существования решений у последних применительно к (3) существенно ограничивает возможные формы $VLI(G,F,X)$, так как при этом требуются весьма сильные предположения о свойствах исходной задачи.

Опираясь на теорию существования решений задач равновесия (2) для вариационно-подобного неравенства (3) доказана

Теорема 1.4. *Пусть для любого фиксированного $x \in X$ функция $G^T(x)F(\cdot)$ квазивыпукла на X. Задача $VLI(G,F,X)$ имеет решение, если выполнено одно из следующих условий*

a) множество X ограничено;

b) найдется непустое ограниченное подмножество $Y \subseteq X$ такое, что для любого $x \in X \setminus Y$ существует $y \in Y$ при котором $\langle G(x), F(y) - F(x)\rangle < 0$.

Пусть X^{VLI} и X_d^{VLI} — множества решений вариационно-подобного (3) и дуального вариационно-подобного (4) неравенств соответственно. Связь между X^{VLI} и X_d^{VLI} устанавливает

Теорема 1.6. *Пусть G является F-псевдомонотонным отображением и для любого фиксированного $x \in X$ функция $G^T(x)F(\cdot)$ явно квазивыпукла на X. Тогда $X^{VLI} = X_d^{VLI}$.*

Одной из целей диссертационных исследований было получение условий существования решений для $VLI(G,F,X)$ в предположениях разных форм выпуклости.

Определение 1.7. *Будем говорить, что $VLI(G,F,X)$ обладает свойством 0-диагональной выпуклости на X, если для каждого конечного множества точек*

$\{y^1,\dots,y^k\} \in X$ и любой выпуклой комбинации $y_\lambda = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i y^i$,

где $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in \Lambda^k$, $\Lambda^k = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^k : \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$, выполнено $\langle G(y_\lambda), \sum_{i=1}^k \lambda_i F(y^i) - F(y_\lambda)\rangle \geq 0$.

Для ограниченного допустимого множества X получен следующий результат.

Теорема 1.7. *Пусть $VLI(G, F, X)$ обладает свойством 0-диагональной выпуклости на X и множество X ограничено. Тогда вариационно-подобное неравенство (3) имеет решение.*

Условие ограниченности множества X в теореме 1.7. можно заменить свойством коэрцитивности задачи.

Теорема 1.8. *Пусть $VLI(G, F, X)$ обладает свойством 0-диагональной выпуклости на X и существует непустое ограниченное подмножество $Y \subseteq X$ такое, что для любого $x \in X \backslash Y$ найдется $y \in Y$ при котором $\langle G(x), F(y) - F(x) \rangle < 0$. Тогда вариационно-подобное неравенство (3) имеет решение.*

В третьем разделе рассмотрены вопросы единственности решения $VLI(G, F, X)$. Опираясь на свойства F-монотонности и теорию единственности решения для задач равновесия (2) доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1.11 *Если в $VLI(G, F, X)$ отображение G — строго F-псевдомонотонно, то может существовать не более одного решения вариационно-подобного неравенства (3).*

Теорема 1.12. *Если в $VLI(G, F, X)$ на множестве X для любого фиксированного $x \in X$ функция $G^T(x)F(\cdot)$ выпукла и отображение G является сильно F-монотонным, то вариационно-подобное неравенство (3) имеет единственное решение.*

Учитывая специфику постановки $VLI(G, F, X)$ получены и другие условия существования и единственности решения.

Теорема 1.13. *Пусть $VLI(G, F, X)$ на множестве X либо удовлетворяет условию 0-диагональной выпуклости, либо для любого фиксированного $x \in X$ функция $G^T(x)F(\cdot)$ является квазивыпуклой. Если на множестве X отображение F удовлетворяет условию Липшица и отображение G является сильно F-монотонным, то вариационно-подобное неравенство (3) имеет единственное решение.*

Вторая глава состоит из трех разделов и посвящена построению методов решения $VLI(G, F, X)$.

В первом разделе рассматриваются проективный и экстраградиентный методы решения (3), основание для применения которых дает

Теорема 2.1. *Пусть на множестве X для любого фиксированного $x \in X$ функция $G^T(x)F(\cdot)$ выпукла и $F(y)$ — непрерывно дифференцируемое отображение. Точка $x^* \in X$ является решением вариационно-подобного неравенства (3) тогда и только тогда, когда*

$$x^* = \pi_X(x^* - \alpha \nabla F^T(x^*)G(x^*)),$$

где $\alpha > 0$ — заданное число, $\nabla F(x^*)$ — матрица Якоби отображения F в точке x^*.

Приведенная теорема дает возможность предложить **проективный метод** для решения $VLI(G, F, X)$:
Инициализация алгоритма

Пусть $x^0 \in X$ — начальная точка, $\alpha > 0$ — заданный параметр. Положим $k = 0$. *Итерация алгоритма*

Шаг 1. Вычислим $x^{k+1} = \pi_X(x^k - \alpha \nabla F^T(x^k)G(x^k))$.

Шаг 2. Если $x^k = x^{k+1}$, то решение $VLI(G, F, X)$ найдено. Алгоритм заканчивает работу.

Шаг 3. Положить $k = k + 1$ и перейти на шаг 1.

Для обоснования проективного метода необходимо сделать следующие предположения о свойствах $VLI(G, F, X)$.

(A1) Для любого фиксированного $x \in X$ функция $G^T(x)F(\cdot)$ выпукла на X.

(A2) Отображение $\nabla F^T(x)G(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L.

(A3) Отображение G — сильно F-монотонно с константой τ.

Теорема 2.2. *Пусть для $VLI(G, F, X)$ выполнены предположения (A1)-(A3). Если $0 < \alpha < \dfrac{2\tau}{L^2}$, то последовательность*

$\{x^k\}$, построенная проективным методом, линейно сходится к решению x^* задачи $VLI(G,F,X)$, то есть

$$\|x^{k+1}-x^*\|^2 \le \gamma\|x^k-x^*\|^2, \quad k=0,1,2,\ldots,$$

для некоторого $\gamma \in [0,1)$.

Одним из ограничительных условий сходимости проективного метода является сильная F-монотонность отображения G. Для отображений, обладающих более слабыми свойствами монотонности, например, F-псевдомонотонность, предлагается использовать **экстраградиентный метод**:

Инициализация алгоритма

Пусть $x^0 \in X$ — начальная точка, $\alpha > 0$ — заданный параметр. Положим $k=0$.

Итерация алгоритма

Шаг 1. Вычислим

$$\begin{aligned} u^k &= \pi_X(x^k - \alpha\nabla F^T(x^k)G(x^k)), \\ x^{k+1} &= \pi_X(x^k - \alpha\nabla F^T(u^k)G(u^k)). \end{aligned}$$

Шаг 2. Если $x^k = x^{k+1}$, то решение $VLI(G,F,X)$ найдено. Алгоритм заканчивает работу.

Шаг 3. Положить $k=k+1$ и перейти на шаг 1.

Теорема 2.3. *Пусть для $VLI(G,F,X)$ выполнены предположения (A1), (A2) и G является F-псевдомонотонным отображением. Если $0<\alpha<\dfrac{1}{L}$, то обе последовательности $\{u^k\}$ и $\{x^k\}$, построенные экстраградиентным методом, сходятся к решению $VLI(G,F,X)$.*

Во втором разделе для решения вариационно-подобных неравенств (3) рассматривается подход, основанный на построении оптимизационной задачи, эквивалентной $VLI(G,F,X)$, и дальнейшем применении методов математического программирования для отыскания ее оптимальных точек. Важную роль в таком преобразовании играют оценочные функции, характеризующие меру отклонения от решения $VLI(G,F,X)$.

Определение 2.4. *Оценочной функцией для вариационно-подобного неравенства (3) называется функция* $\varphi : X \to R \cup \{+\infty\}$, *обладающая следующими свойствами:*

(i) $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$;

(ii) $x^* \in X$ *является решением вариационно-подобного неравенства (3) тогда и только тогда, когда* $\varphi(x^*) = 0$.

Очевидно, что при этом $VLI(G, F, X)$ эквивалентна задаче условной минимизации

$$\min_{x \in X} \varphi(x). \tag{5}$$

Доказано, что функция

$$\varphi(x) = \sup_{y \in X} \langle G(x), F(x) - F(y) \rangle \tag{6}$$

удовлетворяет свойствам (i), (ii) определения 2.4. и, следовательно, является оценочной для $VLI(G, F, X)$.

В работе предполагается, что отображения G и F вариационно-подобного неравенства (3) являются непрерывно дифференцируемыми на X и супремум в (6) достижим, то есть для любого фиксированного $x \in X$ существует $y(x) \in X$ такой, что

$$\sup_{y \in X} \langle G(x), F(x) - F(y) \rangle = \langle G(x), F(x) - F(y(x)) \rangle. \tag{7}$$

Имеет место следующий критерий разрешимости $VLI(G, F, X)$.

Теорема 2.4. *Пусть выполнено предположение*

(B1) Для любого фиксированного $x \in X$ *функция* $G^T(x)F(\cdot)$ *строго выпукла на* X.

Точка $x^* \in X$ *является решением* $VLI(G, F, X)$ *тогда и только тогда, когда* $x^* = y(x^*)$, *где* $y(x^*)$ *решение задачи* (7) *при* $x = x^*$.

В процессе исследования свойств оценочной функции $\varphi(x)$ были получены следующие результаты.

Лемма 2.1. *Оценочная функция $\varphi(x)$, определенная в (6), является слабо выпуклой на X.*

В силу свойств слабо выпуклых функций необходимые условия экстремума в задаче (5) могут быть записаны в виде

$$\varphi'(x^*, x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in X, \tag{8}$$

где $x^* \in X$ — точка минимума $\varphi(x)$, $\varphi'(x^*, x-x^*)$ — производная $\varphi(x)$ в точке x^* по направлению $x - x^*$. Однако, необходимые условия экстремума для слабо выпуклых функций не являются достаточными и кроме того, слабо выпуклые функции могут иметь локальные минимумы, отличные от глобальных.

Точки $x^* \in X$, удовлетворяющие условию (8) будем называть стационарными точками функции $\varphi(x)$.

Введем дополнительное предположение.

(B2) Для любого фиксированного $x \in X$ отображение $\nabla G(x)F(\cdot)$ строго монотонно на X.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия разрешимости оптимизационной задачи (5).

Теорема 2.5. *Пусть выполнены предположения (B1),(B2). Тогда любая стационарная точка $x^* \in X$ оценочной функции $\varphi(x)$ является решением $VLI(G, F, X)$.*

Для решения задачи (5) предлагается построить выпуклую аппроксимацию оценочной функции (6) в значительной степени эквивалентную $\varphi(x)$ с точки зрения ее оптимизации в окрестности текущего приближенного решения.

Далее будем предполагать, что отображения G и F являются дважды непрерывно дифференцируемыми на X.

Зафиксируем точку $\bar{x} \in X$ и выделим ее δ-окрестность $B(\bar{x}, \delta) = \{x : \|x - \bar{x}\| \leq \delta\}$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Окрестность $B(\bar{x}, \delta)$ выбирается так, чтобы для некоторого $R > 0$ и любых $y \in X,\ x_\delta \in B(\bar{x}, \delta)$, $z \in \mathbb{R}^n$ выполнялись неравенства

$$|z^T H_1(x_\delta)z| \leq R\|z\|^2, \ \ |z^T H_2(x_\delta, y)z| \leq R\|z\|^2,$$

где $H_1(x_\delta)$ и $H_2(x_\delta, y)$ — матрицы вторых производных по x в точке x_δ функций $G^T(x)F(x)$ и $(-G^T(x)F(y))$ соответственно.

Обозначим

$$c_0(\bar{x}) = G^T(\bar{x})F(\bar{x}), \quad A(\bar{x}, z) = \nabla G(\bar{x})z + G(\bar{x}),$$
$$C(\bar{x}) = F^T(\bar{x})\nabla G(\bar{x}) + G^T(\bar{x})\nabla F(\bar{x}),$$

и $Z(x, \delta) = \{z : \|z\| \leq \delta,\ x + z \in X\}$ — множество допустимых смещений из точки x по норме не превышающих δ.

Для функции

$$\psi(\bar{x}, z) = c_0(\bar{x}) + C(\bar{x})z + R\|z\|^2 - \inf_{y \in X} F^T(y)A(\bar{x}, z) \qquad (9)$$

справедлива оценка

$$\varphi(\bar{x} + z) \leq \psi(\bar{x}, z), \qquad (10)$$

причем при $z = 0$ имеет место равенство.

Теорема 2.6. *Точка $x^* \in X$ является решением $VLI(G, F, X)$ тогда и только тогда, когда для некоторого $\delta > 0$ точка $z = 0$ есть решение задачи*

$$\min_{z \in Z(x^*, \delta)} \psi(x^*, z) \qquad (11)$$

и $\psi(x^*, 0) = 0$.

Обозначим через $\psi'(\bar{x}, z, d)$ производную по z функции (9) в направлении d. Как показывает следующая лемма, функция $\psi(\bar{x}, z)$ достаточно хорошо аппроксимирует поведение $\varphi(x)$ в окрестности точки $\bar{x}$.

Лемма 2.2. *Пусть множества, на которых достигаются супремумы в* (6) *и инфинум в (9), компактны и $\bar{x} \in X$. Тогда производные по направлениям функций $\varphi(x)$ в точке $x = \bar{x}$ и $\psi(\bar{x}, z)$ в точке $z = 0$ совпадают, то есть*

$$\varphi'(\bar{x}, d) = \psi'(\bar{x}, 0, d). \qquad (12)$$

Следствие 2.1. *Точка $\bar{x} \in X$ является стационарной для функции $\varphi(x)$ тогда и только тогда, когда $z = 0$ — стационарная точка функции $\psi(\bar{x}, z)$.*

Локальная аппроксимируемость $\varphi(x)$ при $x \in B(\bar{x}, \delta)$ функцией $\psi(\bar{x}, z)$ при $z \in Z(\bar{x}, \delta)$, описанная леммой 2.2., позволяет предложить следующий **метод локальных выпуклых мажорант** для решения $VLI(G, F, X)$:

Инициализация алгоритма

Выберем точку $x^0 \in X$ и рассмотрим множество

$$X^0 = \{x : \varphi(x) \leq \varphi(x^0)\}. \tag{13}$$

Определим $\delta > 0$ такое, что для любого $\bar{x} \in X^0$ и $z \in Z(\bar{x}, \delta)$ выполнялось условие (10). В качестве начальной возьмем произвольную точку $\bar{x}^0 \in X^0$. Положим $k = 0$.

Итерация алгоритма

Шаг 1. Решить задачу $\min\limits_{z \in Z(\bar{x}^k)} \psi(\bar{x}^k, z) = \psi(\bar{x}^k, z^k)$.

Шаг 2. Если $z^k = 0$, то $\bar{x}^k$ — стационарная точка оценочной функции $\varphi(x)$. Алгоритм заканчивает работу. При этом, если $\psi(\bar{x}^k, 0) = 0$, то $\bar{x}^k$ — решение $VLI(G, F, X)$.

Шаг 3. Положить $\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k + z^k$, $k = k + 1$ и перейти на шаг 1.

Основным результатом о сходимости описанного метода является

Теорема 2.7. *Пусть точка x^0 выбрана так, что множество X^0, определенное в* (13)*, является компактным и на нем выполнены предположения (B1),(B2). Тогда последовательность $\{\bar{x}^k\}$, генерируемая алгоритмом метода локальных выпуклых мажорант, сходится к решению $VLI(G, F, X)$.*

В третьем разделе в численном эксперименте показаны преимущества переформулировки вариационного неравенства (1) в вариационно-подобное (3). На модельном примере проведено сравнение метода локальных выпуклых мажорант для (3) с традиционным подходом, основанным на минимизации регуляризированной оценочной функции для (1). Результаты эксперимента показали существенно более высокую скорость сходимости первого метода по сравнению со вторым.

Третья глава состоит из трех разделов и посвящена параметрической коррекции несовместных систем неравенств с целью их преобразования в совместные системы.

В первом разделе описана схема параметрической коррекции несовместных систем неравенств, разработанная В.А. Булавским и направленная на поиск компромиссных решений исходных систем.

Рассмотрим систему неравенств

$$F(x) \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

где $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — вектор-функция с компонентами $f_1(x),\ldots,$ $f_m(x)$. Подобные системы, например, возникают при моделировании процессов принятия решений.

В общем случае предполагается, что система (14) несовместна. При рассмотрении несовместных систем необходимо принять некоторое соглашение о том, какой вектор допускается в качестве замены ее традиционного, но несуществующего решения. В работах В.А. Булавского для системы (14) предлагается найти компромиссное решение, которое представляет собой компоненту x^* пары векторов $(x^*, u^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$, удовлетворяющих условиям

$$F(x^*) \leq Qu^*, \; u^* \geq 0, \tag{15}$$

$$(u^*)^T F(x^*) = (u^*)^T Qu^*, \tag{16}$$

$$\nabla F^T(x^*) u^* = 0, \tag{17}$$

где Q — заданная квадратная $(m \times m)$-матрица, $u \in \mathbb{R}^m_+$ — неизвестный вектор параметров. Вектор Qu определяет коррекцию правых частей системы (14).

Условия (15), (16) задают параметрическую линейную задачу дополнительности. Обозначим ее как $PLCP(F(x^*), Q)$. Равенство (17) представляет собой необходимое условие того, что компромиссное решение x^* минимизирует взвешенную коррекцию $(u^*)^T Qu$ правых частей системы (14). При этом используются веса $u^* = u(x^*)$, которые определяются как решения $PLCP(F(x^*), Q)$.

Во втором разделе для параметрической коррекции несовместной системы неравенств (14) предлагается использовать вариационно-подобное неравенство (3) с целью минимизации взвешенной коррекции правых частей системы (14).

Рассмотрим класс $\mathcal{P}_m$ квадратных $(m \times m)$-матриц, у которых все главные миноры положительны. Такие матрицы принято называть $\mathcal{P}$-матрицами. Известно, что если $Q \in \mathcal{P}_m$, то для любого фиксированного вектора $x \in \mathbb{R}^n$ линейная задача дополнительности $PLCP(F(x), Q)$ имеет единственное решение. Доказаны следующие свойства отображения $u(x)$.

Лемма 3.1. *Пусть вектор-функция $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и матрица $Q \in \mathcal{P}_m$. Тогда отображение $u(x)$, определяемое как решение $PLCP(F(x), Q)$ при данном x, является непрерывным.*

Лемма 3.2. *Если матрица Q симметрична, то отображение $u(x)$ вариационно-подобного неравенства (18) является F-монотонным на всем пространстве $\mathbb{R}^n$.*

Свойство непрерывности отображения $u(x)$, установленное леммой 3.1., дает возможность проводить параметрическую коррекцию системы (14) с помощью вариационно-подобного неравенства (3). Везде далее будем предполагать, что $Q \in \mathcal{P}_m$.

Определение 3.2. *Обобщенным решением системы неравенств (14) называется точка $x^* \in \mathbb{R}^n$ такая, что*

$$\langle u(x^*), F(x) - F(x^*) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

где $u(x^*) = u^*$ — решение $PLCP(F(x^*), Q)$.

Условие (18) представляет собой вариационно-подобное неравенство (3), отличительной особенностью которого является, во-первых, неявное задание отображения $G(x) = u(x)$, как решения линейной задачи дополнительности $PLCP(F(x), Q)$ для каждого фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ и, во-вторых, то, что допустимая область в (18) совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$.

Связь между компромиссным и обобщенным решениями дает

Утверждение 3.2. *Если вектор-функция* $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ *покомпонентно выпукла и матрица* Q *симметричная, то условия (15)-(17) и (18) эквивалентны, то есть компромиссное решение системы неравенств (14) совпадает с обобщенным.*

Опираясь на построенную теорию существования решений для вариационно-подобных неравенств (3) доказана

Теорема 3.1. *Пусть выполнены следующие условия*

a) вектор-функция $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ *покомпонентно выпукла;*

b) найдется компактное множество $Y \subset \mathbb{R}^n$ *такое, что для любого* $x \notin Y$ *существует* $y \in Y$ *при котором* $F(y) < F(x)$.

Тогда система неравенств (14) имеет обобщенное решение.

Отметим, что одним из предположений теоремы 3.1. является покомпонентная выпуклость F, следовательно, если Q — симметричная матрица, то в силу утверждения 3.2. приведенная теорема также гарантирует существование компромиссного решения для нелинейной системы неравенств (14).

Для симметричных матриц Q структура вариационно-подобного неравенства (18) позволяет предложить еще одни условия существования обобщенных решений, одновременно совпадающих с компромиссными.

Теорема 3.2. *Пусть матрица* Q *симметрична и выполнены следующие условия*

a) вектор-функция $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ *покомпонентно выпукла;*

b) $\|F(x)\| \to \infty$ *при* $\|x\| \to \infty$ *и существует* $\varepsilon > 0$ *для которого найдется* $R > 0$ *такой, что* $\max\limits_{i=1,\ldots,m} \dfrac{f_i(x)}{\|F(x)\|} \geq \varepsilon$ *для всех* x *таких, что* $\|x\| > R$.

Тогда система неравенств (14) имеет обобщенное решение, которое совпадает с компромиссным.

В третьем разделе предложена схема частичной коррекции системы неравенств, когда для преобразования исходной несовместной системы в совместную изменяется лишь часть ее ограничений.

Предположим, что (14) можно разделить на две непересекающиеся подсистемы так, чтобы первая (директивная) подсистема была совместной, а вторая (факультативная) содержала ограничения, не вошедшие в первую. Будем корректировать факультативную подсистему, с целью получения решения всей системы (14).

Пусть $F(x) = (H(x), D(x))$, где $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_1}$ и $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_2}$ — вектор-функции, образующие факультативные и директивные ограничения, $m_1 + m_2 = m$. Систему (14) можно представить в виде

$$H(x) \leq 0 \quad x \in X, \tag{19}$$

где $X = \{x \in \mathbb{R}^n : D(x) \leq 0\} \neq \emptyset$ — множество решений директивной подсистемы.

Определение 3.3. *За обобщенное решение системы (19) примем вектор $x^* \in X$ такой, что*

$$\langle u(x^*), H(x) - H(x^*) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X, \tag{20}$$

где $u(x^*)$ — решение $PLCP(H(x^*), \tilde{Q})$, $\tilde{Q} \in \mathcal{P}_{m_1}$ — заданная матрица. Вектор $\tilde{Q}u$ определяет коррекцию правых частей факультативной подсистемы $H(x) \leq 0$.

Теорема 3.3. *Пусть вектор функция $H(x) = (h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{m_1}(x))$ покомпонентно выпукла. Система (19) имеет обобщенное решение, если выполнено одно из следующих условий*

a) X — ограниченное множество;

b) найдется непустое ограниченное подмножество $Y \subseteq X$ такое, что для каждого $x \in X \backslash Y$ существует $y \in Y$ при котором $H(y) < H(x)$.

c) матрица $\tilde{Q}$ *симметрична и при* $\|x\| \to \infty$ *таких, что* $x \in X$*, выполнено* $\|F(x)\| \to \infty$ *и существует* $\varepsilon > 0$ *для которого найдется* $R > 0$ *такой, что* $\max\limits_{i=1,\ldots,m} \dfrac{h_i(x)}{\|H(x)\|} \geq \varepsilon$ *для всех* $x \in X$ *таких, что* $\|x\| > R$.

Четвертая глава состоит из трех разделов и посвящена применению разработанного в предыдущих разделах теоретического и алгоритмического аппарата вариационно-подобных неравенств для решения задач транспортного равновесия с эластичным спросом.

В первом разделе дана содержательная постановка задачи транспортного ценового равновесия, которая состоит в поиске объемов производства и потребления в рассматриваемой экономической системе, а также в распределении товарных потоков по заданной транспортной сети, удовлетворяющих условию бескоалиционного равновесия между маршрутизированными потоками товара от производителя потребителю.

Во втором разделе условия равновесия формулируются в виде вариационного неравенства (1), что является традиционным подходом к решению данной задачи. Далее с целью сокращения размерности и упрощения допустимой области вариационное неравенство (1) преобразуется в вариационно-подобное (3) путем замены переменных.

В третьем разделе на модельном примере (сеть с 25 вершинами, 40 дугами) продемонстрирована сходимость алгоритмов проективного и экстраградиентного методов, а также метода локальных выпуклых мажорант для решения вариационно-подобных неравенств и приведено сравнение вычислительной эффективности перечисленных методов с методом спуска по оценочной функции для классических вариационных неравенств. В результате численных экспериментов проективный и экстраградиентный методы решения вариационно-подобного неравенства подтвердили линейный характер сходимости, однако решение было получено за большое количество итераций (порядка $3 \cdot 10^3$ для проективного и $5 \cdot 10^3$ для экстраградиентного методов). Для метода локальных выпуклых мажорант понадобилось значительно меньшее число итераций (252), причем характер сходимости был также преимущественно линейный.

В заключении дана сводка полученных результатов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Для вариационно-подобных неравенств проведены теоретические исследования условий существования и единственности решений: доказаны теоремы существования решений на ограниченном и неограниченном допустимых множествах в предположениях свойств квазивыпуклости и 0-диагональной выпуклости; построено дуальное вариационно-подобное неравенство и установлена связь между множеством его решений и множеством решений вариационно-подобного неравенства; получены условия единственности решения вариационно-подобного неравенства в предположениях (строгой, сильной) F-монотонности, (квази-, 0-диагональной) выпуклости, липшицевости отображений; установлена связь между вариационно-подобным неравенством и задачей нахождения неподвижных точек проективного отображения.

2. Для решения вариационно-подобных неравенств предложены схемы проективного, экстраградиентного методов, метода локальных выпуклых мажорант и доказана их сходимость.

3. Исследованы приложения вариационно-подобных неравенств для эквивалентного преобразования классических вариационных неравенств в вариационно-подобные с целью улучшения вычислительных свойств решаемых задач (упрощение допустимой области, сокращение размерности и т.п.), для проведения полной или частичной параметрической коррекции несовместных систем неравенств при моделировании

процессов принятия решений, для нахождения обобщенных решений некорректных систем и получения условий их существования.

4. Проведена программная реализация предложенных методов и проделаны вычислительные эксперименты по сравнению эффективности рассматриваемых алгоритмов. Создан комплекс программ для решения задач транспортного равновесия с эластичным спросом.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы. Построенная теория гарантирует в определенных условиях существование и единственность решения у вариационно-подобных неравенств. Для поиска решения можно использовать проективный и экстраградиентный методы, которые имеют глобальную сходимость, однако для этого необходимо выполнение весьма ограничительных предположениях о свойствах задачи. Предложенный метод локальных выпуклых мажорант сходится к стационарным точкам введенной оценочной функции и в условиях хорошего начального приближения приводит к решению задачи. Вариационно-подобные неравенства представляют собой удобный формализм исследования задач потокового равновесия и проведения параметрической коррекции несовместных систем неравенств. Вычислительные эксперименты, проведенные на модельных примерах, позволяют надеяться на достаточно высокую (линейную) скорость сходимости предлагаемых алгоритмов.

ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Зыкина, А.В. Проективный метод для систем неравенств [Текст] / А.В. Зыкина, Н.Б. Шамрай // Доклады академии наук высшей школы России / Новосибирское отделение АН ВШ. — 2005. — №1(4). — С. 36-43.

2. Нурминский, Е.А. Метод локальных выпуклых мажорант для решения транспортных задач ценового равновесия [Текст] / Е.А. Нурминский, Н.Б. Шамрай // III Всероссийская конференция "Проблемы оптимизации и экономические приложения": Материалы конференции (Омск, 11-15 июля 2006 г.) / Омский филиал Института математики им. Соболева СО РАН. — Омск: Изд-во ОмГТУ, 2006. — С. 149.

3. Нурминский, Е.А. Метод локальных выпуклых мажорант для вариационно-подобных неравенств [Текст] / Е.А. Нурминский, Н.Б. Шамрай // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47, №3. — С. 355-363.

4. Шамрай, Н.Б. Два подхода к решению систем неравенств [Текст] / Н.Б. Шамрай // Динамика систем, механизмов и машин: Материалы IV Междунар. науч.-техн. конф., посвященной 60-летию ОмГТУ (Омск, 12-14 ноября 2002 г.). — Омск: Изд-во ОмГТУ, 2002. — Кн. 2. — С. 209-212.

5. Шамрай, Н.Б. О некоторых вариационных подходах к решению систем неравенств [Текст] / Н.Б. Шамрай // Всероссийская конференция "Проблемы оптимизации и экономические приложения": Материалы конференции (Омск, 1-5 июля 2003) / Омский филиал Института математики им. Соболева СО РАН. — Омск: Изд-во Наследие. Диалог Сибирь, 2003. – С. 139.

6. Шамрай, Н.Б. О некоторых подходах к решению систем неравенств [Текст] / Н.Б. Шамрай // Материалы Всероссийской научной молодежной конференции "Под знаком "Сигма" / ОНЦ СО РАН. — Омск: Полиграфический центр КАН, 2003. — С. 18-19.

7. Шамрай, Н.Б. О двух подходах к решению систем неравенств [Текст] / Н.Б. Шамрай // Омский научный вестник, 2003. №3 (24). — С. 55-57.

8. Шамрай, Н.Б. Метод последовательных приближений для систем неравенств [Текст] / Н.Б. Шамрай // Динамика систем, механизмов и машин : Матер. V Междунар. науч.-техн. конф. (16-18 ноябр. 2004 г.). / Омск : Изд-во ОмГТУ, 2004. – Кн. 2. — С. 351-355.

9. Шамрай, Н.Б. Псевдообобщенное вариационное неравенство [Текст] / Н.Б. Шамрай // Российская конференция "Дискретный анализ и исследование операций": Материалы конференции (Новосибирск, 28 июня-2июля 2004). — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2004. – С. 137.

10. Шамрай, Н.Б. Приложения вариационно-подобных неравенств [Текст] / Н.Б. Шамрай // Военная техника, вооружение и технологии двойного применения : Материалы III Междунар. технологич. конгресса (Омск, 7-10 июня 2005 г.) : в 2 ч. — Омск : ОмГУ, 2005. — Ч. II. — С. 146-148.

11. Шамрай, Н.Б. Решение несобственных задач линейного программирования при помощи системы линейных неравенств [Текст] / Н.Б. Шамрай // Прикладная математика и информационные технологии: Сб. науч. и метод. трудов / Под ред. А.А.Колоколова. — Омск: Изд-во ОмГТУ, 2005. — С. 106-114.

12. Шамрай, Н.Б. Вариационно-подобное неравенство [Текст] / Н.Б. Шамрай // Туполевские чтения: Международная молодежная научная конференция, посвященная 1000-летию города Казани (Казань, 10-11 ноября 2005 г.): Материалы конференции. — Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2005. — Т. II. — С. 83.

13. Шамрай, Н.Б. Вариационный подход к решению несобственных задач линейного программирования [Текст] / Н.Б. Шамрай // Математическое программирование: Труды XIII Байкальской международной школы-семинара "Методы опти-

мизации и их приложения" (Иркутск, Байкал, 2-8 июля 2005 г.) / Иркутск, ИСЭМ СО РАН. — 2005. — Т. 1. — С. 155-160.

14. Шамрай, Н.Б. Применение вариационно-подобных неравенств для решения задач транспортного ценового равновесия [Текст] / Н.Б. Шамрай // Информатика и системы управления. — 2006. — №1(11). — С. 62-72.

15. Шамрай, Н.Б. Применение вариационно-подобных неравенств для решения задач транспортного ценового равновесия [Текст] / Н.Б. Шамрай // Омский научный вестник. — 2006. — №4(38). — С. 71-74.

ЛИЧНЫЙ ВКЛАД АВТОРА

По результатам диссертационных исследований автор имеет три совместных работы [1]-[3].

В работе [1] автором самостоятельно предложена схема проективного метода для решения вариационно-подобного неравенства, доказана его сходимость, предложена схема параметрической коррекции несовместных систем неравенств с помощью вариационно-подобных неравенств.

В работе [2] автором самостоятельно показана возможность сведения задачи транспортного ценового равновесия к вариационно-подобному неравенству и дальнейшее использование метода локальных выпуклых мажорант для поиска равновесия в рассматриваемой экономической системе, разработано программное обеспечение и проведены численные эксперименты.

В работе [3] автором самостоятельно предложена оценочная функция и ее локальная выпуклая мажоранта, исследованы их свойства, разработана и реализована схема метода локальных выпуклых мажорант, доказана его сходимость, проведены численные эксперименты.

Шамрай Наталья Борисовна

ВАРИАЦИОННО-ПОДОБНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ РАВНОВЕСИЯ И КОРРЕКЦИИ НЕСОВМЕСТНЫХ СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ

АВТОРЕФЕРАТ

Подписано в печать 20.03.2007.
Формат 60x84 1/16. Усл-печ. л. 1.63; Уч-изд. л. 1,52.
Тираж 120 экз. Заказ

Издательство Дальневосточного университета
690950, г. Владивосток, ул. Октябрьская, 27

Отпечатано в типографии
Издательско-полиграфического комплекса ДВГУ
690950, г. Владивосток, ул. Алеутская, 56