Ефремов Е.Л.

ПРИМЕР НЕКОММУТАТИВНОГО МОНОИДА, НАД КОТОРЫМ КЛАСС СЛАБО ИНЪЕКТИВНЫХ ПОЛИГОНОВ НЕ ПРИМИТИВНО НОРМАЛЬНЫЙ

Кафедра алгебры, геометрии и анализа ШЕН ДВФУ
Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор А.А. Степанова

В [1, 2] описаны моноиды, над которыми класс всех полигонов примитивно нормален. В [3] доказано, что теория любого инъективного полигона примитивно нормальна. Понятие слабо инъективного полигона является обобщением понятия инъективного полигона. В [4] показан пример коммутативного моноида, над которым класс всех слабо инъективных полигонов не является примитивно нормальным. В данной работе продолжен поиск критерия примитивной нормальности класса слабо инъективных полигонов.

Напомним некоторые понятия из теории полигонов и теории моделей.

Пусть S – моноид. Под *(левым) полигоном* ${}_S A$ *над моноидом* S понимается множество A, на котором определено действие элементов из S, причем единица действует на A тождественно. Полигон ${}_S Q$ называется *инъективным полигоном* над S, если для любого полигона ${}_S B$ над S, для любого подполигона ${}_S A \subseteq {}_S B$ и для любого гомоморфизма $\varphi\colon {}_S A \to {}_S Q$ существует гомоморфизм $\overline{\varphi}\colon {}_S B \to {}_S Q$, продолжающий φ:

$$\begin{tikzcd} {}_S A \arrow[d, "\varphi"'] & \subseteq & {}_S B \arrow[dll, "\bar{\varphi}"] \\ {}_S Q. & & \end{tikzcd}$$

Если в определении инъективного полигона заменить полигон ${}_S B$ на полигон ${}_S S$, а полигон ${}_S A$ на полигон ${}_S I$, где I – левый идеал S, то получится определение *слабо инъективного полигона*.

Пусть T – полная теория языка L, $\mathcal{A} = \langle A; L\rangle$ – алгебраическая система языка L. Если $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ – формула языка L, $\bar{a} \in A$ той же длины, что и $\bar{y}$, то через $\Phi(\mathcal{A}, \bar{a})$ будем обозначать множество $\{\bar{b} \in A \mid \Phi(\bar{x}, \bar{y})$ истинна в $\mathcal{A}$ на $\langle \bar{b}, \bar{a}\rangle\}$. Формула $\exists \bar{x}(\Phi_0 \wedge \ldots \wedge \Phi_k)$, где Φ_i $(i \leq k)$ – атомарные формулы языка L, называется *примитивной*. Если $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ – примитивная формула языка L, $\bar{a} \in A$ той же длины, что и $\bar{y}$, то множество вида $\Phi(\mathcal{A}, \bar{a})$ называется *примитивным*. Если $\bar{b} \in A$ той же длины, что и $\bar{y}$, то множества $\Phi(\mathcal{A}, \bar{a})$ и $\Phi(\mathcal{A}, \bar{b})$ называются *примитивными копиями*. Теория T называется *примитивно нормальной*, если $X = Y$ или $X \cap Y = \emptyset$ для любых примитивных копий X и Y. Класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем языка L называется *примитивно нормальным*, если теория $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ примитивно нормальна для любой $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$.

Утверждение. Пусть моноид S порождается множеством $\{s_1, s_2\}$ и выполняются следующие условия:

1) $t(s_1 s_2^n) = s_1 s_2^n$ для любого $t \in S$,

2) $S s_1 s_2^n \cap S s_2^{n+1} = \emptyset$

для любого $n \in \omega$. Тогда класс всех слабо инъективных полигонов над моноидом S не примитивно нормальный.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 17-01-00531, и Минобрнауки РФ, дополнительное соглашение от 21.04.2020 № 075-02-2020-1482-1.

Список литературы

1. Степанова, А. А. Примитивно связные и аддитивные теории полигонов // Алгебра и логика. – 2006. – Т.45, № 3. – С. 300-313.
2. Степанова, А. А. Полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями // Алгебра и логика. – 2008. – Т.47, № 4. – С. 279-288.
3. Ефремов, Е.Л. Примитивная нормальность и примитивная связность класса инъективных полигонов // Алгебра и логика (в печати).
4. Ефремов, Е.Л. Пример моноида, над которым класс слабо инъективных полигонов не является примитивно нормальным // Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, Владивосток, 15–30 апреля 2019 г. [Электронный ресурс] – Владивосток: Дальневост. федерал. ун-т. – 2019. – С. 246-247.