

## АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ МНОГОКРАТНО РАССЕЯННОГО ЗВУКОВОГО ПОЛЯ НА КАЧЕСТВО ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

<sup>1</sup>Кафедра Информатики, математического и компьютерного моделирования ШЕН ДВФУ

<sup>2</sup>Институт прикладной математики ДВО РАН

<sup>2</sup>Научный руководитель - д. ф.-м. н., профессор И.В. Прохоров

В работе рассмотрена математическая модель, основанная на линейном интегро-дифференциальном уравнении Больцмана. Область применения уравнения переноса достаточно обширна – от моделирования диффузии нейтронов и электронов в веществе до описания процессов распространения высокочастотного электромагнитного и акустического излучения в рассеивающих средах. Мы будем рассматривать нестационарное уравнение переноса излучения применительно к акустическому зондированию флуктуирующих неоднородных сред [1], [2], [3]. Цель работы – проверить допустимость приближения однократного рассеяния для решения задачи определения коэффициента объемного рассеяния звука в океане.

Нестационарный процесс распространения высокочастотных волновых полей в изотропно рассеивающей среде может быть описан следующим интегро-дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + \mu I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{2\pi} \int_{\Omega} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}' + J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) \quad (1)$$

где  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  принадлежит единичной окружности  $\Omega = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2: |\mathbf{k}| = 1\}$ . Функция  $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$  интерпретируется как плотность потока энергии волны в момент времени  $t$  в точке  $\mathbf{r}$ , распространяющейся в направлении  $\mathbf{k}$  со скоростью  $c$ . Величины  $\mu$  и  $\sigma$  имеют смысл коэффициентов затухания и рассеяния, а функция  $J$  описывает источники звукового поля.

Присоединим к уравнению (1) начальное условие

$$I^-(\mathbf{r}, \mathbf{k}, 0) = 0, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{k}) \in G \times \Omega \quad (2)$$

и будем предполагать, что функция  $J$  описывает точечный источник излучения, сосредоточенный в начале координат, излучающий в момент времени  $t = 0$  импульс единичной мощности:

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t), \quad (3)$$

где  $\delta$  – дельта-функция Дирака.

Прямой задачей для уравнения переноса (1) называется задача определения функции  $I$  из уравнения (1) и начального условия (2) при всех заданных коэффициентах  $(c, \mu, \sigma, J)$ . В работе предполагается, что  $c$  и  $\mu$  – скалярные величины, а  $\sigma(\mathbf{r})$  – кусочно-непрерывная функция в  $\mathbb{R}^2$ , причем  $\sigma(\mathbf{r}) \leq \mu$ .

Наряду с прямой задачей, будем рассматривать обратную задачу, заключающуюся в определении функции  $\sigma$  из соотношений (1),(2),(3) и дополнительного условия

$$I^+(0, \mathbf{k}, t) = P(\mathbf{k}, t), \quad (4)$$

в которых величины  $c, \mu$  и функция  $P$  известны.

Решение прямой задачи может быть найдено в виде ряда Неймана. Было получено выражение для первой компоненту  $I_1$ , чтобы впоследствии использовать ее в качестве начального приближения. Также было получено выражение для  $I_2$ .

$$I_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{c \exp(-\mu ct)}{2\pi(ct - (\mathbf{r}, \mathbf{k}))} \sigma(\mathbf{r} - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)\mathbf{k}) \quad (5)$$

$$I_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{c \exp(-\mu ct)}{(2\pi)^2} \int_0^{\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)} \int_{\Omega} \frac{\sigma(\mathbf{r}_1)\sigma(\bar{\mathbf{r}}_1)}{ct_1 - (\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1)} d\mathbf{k}_1 d\tau_1 \quad (6)$$

Из представления (3) для источника излучения, вытекает  $I_0^+(0, \mathbf{k}, t) = 0$ , поэтому решение задачи Коши в точке  $\mathbf{r} = 0$  может быть найдено в виде ряда Неймана

$$I^+(0, \mathbf{k}, t) = I_1^+(0, \mathbf{k}, t) + \frac{c \exp(-\mu ct)}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)} \int_{\Omega} \dots \int_0^{\tau(\mathbf{r}_{n-2}, \mathbf{k}_{n-2}, t_{n-2})} \int_{\Omega} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma(\mathbf{r}_i)}{2\pi} \times \times \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{ct_{n-1} - (\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1})} d\mathbf{k}_{n-1} d\tau_{n-1} \dots d\mathbf{k}_1 d\tau_1 \quad (7)$$

где  $\bar{\mathbf{r}}_{n-1} = \mathbf{r}_{n-1} - \tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1})\mathbf{k}_{n-1}$  и  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \tau_i \mathbf{k}_{i-1}$ ,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$ ,  $t_i = t_{i-1} - \tau_i/c$ ,  $t_0 = t$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ .

Формула (8) дает явное решение обратной задачи в приближении однократного рассеяния.

$$\sigma_n(\mathbf{r}) = P_n \left( -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c} \right) \left( \frac{4\pi|\mathbf{r}|}{c \exp(-2\mu|\mathbf{r}|)} \right) \quad (8)$$

В вычислительных экспериментах функция  $\sigma(\mathbf{r})$  вычислялась по формуле (8).  $P_n$  – решение уравнения переноса излучения в приближении  $n$ -кратного рассеяния, вычисляемое по формуле (7). Источник звука, сосредоточен в начале координат. Скорость звука и коэффициент затухания имели значения:  $c = 1500$  м/с,  $\mu = 0.018$  м<sup>-1</sup>. Отношение  $\sigma/\mu$  в основной водной среде составляло 0.1 [1], а во включениях менялось в диапазоне от 0 до 1. На рисунке 1 в графическом виде представлена карта значений коэффициента рассеяния в приближении однократного рассеяния, оно совпадает с точным решением. На рисунке 2 представлен результат восстановления функции  $\sigma_5$  по формуле (8). Результат представлен до пятикратного рассеяния, так как вычисленная среднеквадратичная ошибка стабилизируется уже на четырехкратном рассеянии.

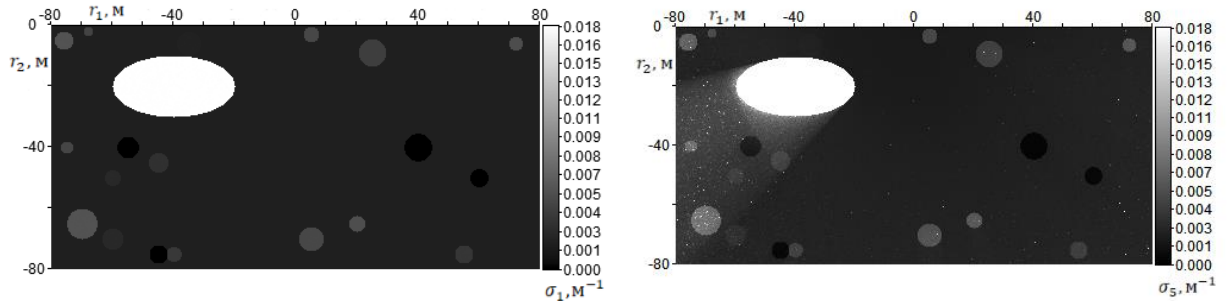


Рисунок 1 – карта значений коэффициента рассеяния  $\sigma_1$  (однократное рассеяние) – слева и  $\sigma_5$  (пятикратное рассеяние) – справа

Несмотря на появление «засветки» от самого большого сильно рассеивающего включения ( $\sigma/\mu = 1$ ), на томографических изображениях можно достаточно четко различить восстанавливаемую структуру среды. Изображения для функций  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  и  $\sigma_4$

качественно мало отличаются от рисунка 2. Таким образом, при акустическом зондировании в океане на дальности порядка 100 метров приближение однократного рассеяния позволяет воссоздавать качественную структуру среды, а получение гарантированных количественных оценок коэффициента объемного рассеяния остается под вопросом.

*Благодарности*

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, доп. соглашение № 075-02-2020-1482-1.

*Список литературы*

1. Мендус, В. И., Постнов, Г. А. Об угловом распределении высокочастотных динамических шумов океана / В. И. Мендус, Г. А. Постнов //Акустический журнал. -1993. Т. 39. -№ 6. -С. 1107–1116.
2. Андреева, И. Б., Белоусов, А. В. О допустимости использования приближения однократного рассеяния акустических волн в задачах о скоплениях гидробионтов / И. Б. Андреева, А. В. Белоусов //Акустический журнал. -1996. Т. 42. -№ 4. -С. 560–562.
3. Прохоров, И. В., Сущенко, А. А. Исследование задачи акустического зондирования морского дна методами теории переноса излучения / И. В. Прохоров, А. А. Сущенко //Акустический журнал. -2015. Т. 61. -№ 3. -С. 400–408.